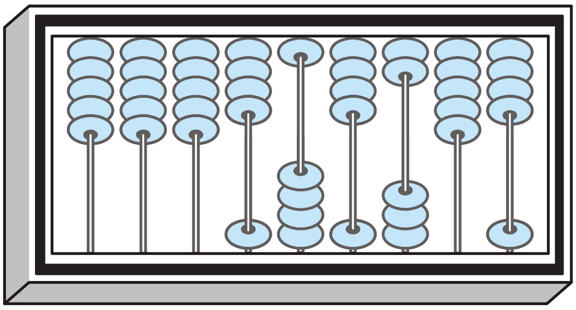
فصل اول

«مبانی شمارش»

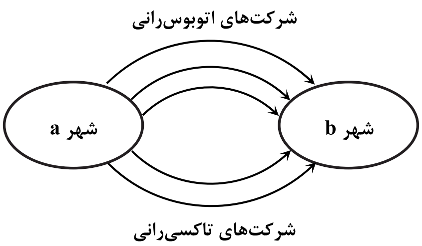


مقدمه

هر یک از ما در زندگی روزمره به طور آگاهانه یا ناخودآگاه از شمارش استفاده می‌کنیم. برنامه‌ریزی‌های زمانی در طول روز مانند انتخاب یک مسیر مناسب از بین تعداد زیاد مسیرهای ممکن، برای رسیدن به مقصد در یک روز پرترافیک و یا برنامه‌ریزی برای انجام چند کار پشت سر هم در مدت محدود، نمونه‌هایی از ارزیابی‌های زندگی روزمره هستند. اگر کمی دقیق‌تر به مسائل شمارش توجه کنیم، به کاربردهای آن در زمینه‌هایی نظیر تحلیل الگوریتم‌ها، محاسبه احتمال و نظریه کدگذاری پی می‌بریم. هدف این فصل بررسی روش‌های ابتدایی و ساده‌ای است که می‌تواند به نحوه تفکر ما در استفاده از مفاهیم شمارش کمک کند.

درسنامه (۱): مفاهیم مرتبط با جایگشت

مفاهیم اولیه



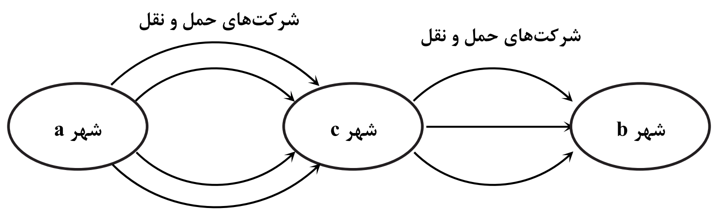
فرض کنید برای سفر از شهر a به شهر b می‌توان از تاکسی یا اتوبوس استفاده نمود. در صورتی که ۳ شرکت اتوبوس‌رانی و ۲ شرکت تاکسی‌رانی در این مسیر فعالیت کنند، برای سفر از شهر a به شهر b می‌توان یکی از این $۳+۲=۵$ شرکت را انتخاب نمود.

به‌طور کلی می‌توان این قاعده را در قالب اصل زیر بیان نمود:

❖ **تعریف اصل جمع (rule of sum):** اگر بتوان کاری را به m طریق و کار دیگری را به n طریق انجام داد و این دو کار به‌طور **هم‌زمان** قابل انجام دادن نباشد، آنگاه در آن لحظه یکی از این دو کار را می‌توان به $n+m$ طریق انجام داد.

اصل جمع را می‌توان برای تعداد حالت‌های بیشتر نیز استفاده نمود. به عنوان مثال اگر در مثال قبل علاوه بر شرکت‌های اتوبوس‌رانی و تاکسی‌رانی، ۴ شرکت هواپیمایی و یک شرکت حمل و نقل ریلی نیز در مسیر بین شهرهای a تا b فعالیت نماید، تعداد حالات انتخاب یک شرکت برای سفر از شهر a به b برابر $۳+۲+۴+۱=۱۰$ خواهد بود.

حال فرض کنید در سفر از شهر a به شهر b مجبور باشیم در شهر c توقف کنیم. یعنی ابتدا از a به c و سپس از c به b سفر کنیم. در صورتی که برای سفر از شهر a به c در مجموع ۴ شرکت حمل و نقل و برای سفر از شهر c به b در مجموع ۳ شرکت حمل و نقل فعالیت نمایند، در نهایت برای سفر از شهر a به شهر c به تعداد $۴\times۳=۱۲$ حالت برای انتخاب ۲ شرکت در سفر از شهر a به شهر b خواهیم داشت که یکی مربوط به سفر از شهر a به c و دیگری مربوط به سفر از شهر c به b است.



اصل ضرب، قاعده کلی استفاده شده در این مثال را در زیر بیان می‌کند:

❖ **تعریف اصل ضرب (rule of product):** اگر عملی به m طریق قابل انجام باشد و به ازای هر یک از این m طریق، عمل دیگری به n طریق قابل انجام باشد، آنگاه در مجموع، انجام این دو عمل به $n\times m$ طریق امکان‌پذیر است.

اصل ضرب نیز مانند اصل جمع قابل تعمیم دادن به تعداد حالات بیشتر است. به عنوان مثال فرض کنید در سفر از شهر a به b مجبور باشیم به ترتیب در شهرهای c، d و e توقف کنیم. در صورتی که تعداد شرکت‌های حمل و نقل فعالیت‌کننده در مسیر شهرهای a تا c، c تا d، d تا e و e تا b به ترتیب برابر ۴، ۵، ۲ و ۳ باشد، تعداد راه‌های انتخاب شرکت‌ها برای سفر از شهر a به b برابر $۴\times۵\times۲\times۳=۱۲۰$ خواهد بود.

مثال۱: چند عدد سه‌رقمی با ارقام صفر تا پنج می‌توان نوشت به شرطی که:

الف) تکرار ارقام مجاز باشد. **ب) تکرار ارقام مجاز نباشد.**

☑ **پاسخ:** فرض کنید عدد ۳ رقمی حاصل به صورت $\overline{abc}$ باشد که به ترتیب از چپ، صدگان، دهگان و یکان عدد مورد نظر هستند. هر یک از این ارقام مقدار ۰ تا ۵ را می‌توانند داشته باشند.

الف) اگر تکرار مجاز باشد، رقم‌های a، b و c می‌توانند برابر باشند. با توجه به اینکه رقم صدگان نمی‌تواند صفر باشد، باید یکی از اعداد ۱ تا ۵ باشد. در نتیجه a ، ۵ حالت انتخاب دارد. مقادیر یکان و دهگان محدودیتی در انتخاب ندارند و هرکدام می‌توانند یکی از شش رقم ۰ تا ۵ را بگیرند. پس b و c هر کدام ۶ حالت انتخاب دارند. بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد کل اعداد سه‌رقمی با شرط اینکه ارقام بین ۰ تا ۵ باشند و تکرار مجاز باشد، برابر خواهد بود با حاصل‌ضرب تعداد حالت انتخاب ارقام یعنی: $۵\times۶\times۶=۱۸۰$.

ب) اگر تکرار مجاز نباشد، علاوه بر محدودیت اینکه رقم صدگان نمی‌تواند صفر باشد، یک محدودیت دیگر نیز خواهیم داشت که تمام ارقام باید با رقم‌های انتخاب شده قبلی متفاوت باشد. در حل این‌گونه مسائل پیشنهاد می‌شود برای سهولت کار، ابتدا تعداد حالت‌های پارامترهایی که محدودیت بیشتری دارند، محاسبه شود. برای اعمال محدودیت برابر نبودن ارقام کافی است رقمی که در مرحله iاُم انتخاب شده را از مجموعه حالت‌های رقم‌های i به بعد حذف کنیم. بیشترین محدودیت روی رقم صدگان است که هم باید با رقم یکان و دهگان متفاوت باشد و هم نباید صفر شود.

بنابراین ابتدا رقم صدگان را انتخاب می‌کنیم که ۵ حالت انتخاب برای آن وجود دارد (یکی از ارقام ۱ تا ۵) و در مرحله بعد یکی از ارقام یکان یا دهگان را انتخاب می‌کنیم. هر دو رقم محدودیت‌های برابری دارند. برای رقم دهگان ۵ حالت خواهیم داشت؛ زیرا این رقم باید یکی از ارقام ۰ تا ۵ باشد و رقم انتخابی برای صدگان نیز نباشد. رقم یکان نیز ۴ حالت خواهد داشت؛ زیرا این رقم نیز باید یکی از ارقام ۰ تا ۵ باشد و نباید با رقم‌های انتخابی برای صدگان و دهگان برابر باشد. در نتیجه طبق اصل ضرب، جواب مسأله در این حالت برابر با $۵\times۵\times۴=۱۰۰$ خواهد بود.

در صورتی‌که برای حل قسمت (ب) مثال بالا، ابتدا تعداد حالت صدگان محاسبه نشود، جواب مسأله تغییر نمی‌کند و فقط راه‌حل طولانی‌تر می‌شود. برای رقم یکان ۶ حالت و برای رقم دهگان نیز ۵ حالت در نظر می‌گیریم (ارقام ۰ تا ۵ منهای عدد انتخاب شده در یکان). برای انتخاب تعداد ارقام صدگان یک مشکل خواهیم داشت، اینکه نمی‌دانیم رقم صفر در یکان و دهگان استفاده شده است یا نه.

اگر رقم صفر در یکان و دهگان استفاده شده باشد، برای صدگان ۴ حالت داریم و اگر رقم صفر در یکان و دهگان استفاده نشده باشد، برای صدگان ۳ حالت داریم. توجه کنید که همواره یکی از این دو حالت اتفاق می‌افتد، پس اصل جمع اعمال می‌شود. حال باید حساب کنیم که در چند حالت، رقم صفر در یکان و دهگان، انتخاب نشده است. تعداد این اعداد دورقمی که از ارقام ۱ تا ۵ تشکیل شده است، برابر $۵\times۴=۲۰$ خواهد بود و تعداد حالات انتخاب رقم یکان و دهگان که حتماً رقم صفر دارند، برابر خواهد بود با $۶\times۵-۲۰=۱۰$، یعنی تعداد حالات انتخاب رقم‌های یکان و دهگان بدون تکرار از مجموعه ۰ تا ۵ منهای تعداد حالات انتخاب رقم یکان و دهگان از مجموعه ۱ تا ۵.

حاصل این تفریق تعداد حالاتی را نشان می‌دهد که رقم ۰ در یکان و دهگان وجود دارد. طبق اصل جمع، جواب کلی مسأله برابر خواهد بود با تعداد حالاتی از ارقام یکان و دهگان که رقم صفر ندارند ضرب در ۳، به علاوه تعداد حالات ارقام یکان و دهگان که رقم صفر دارند ضرب در ۴ یعنی: $۴\times۱۰+۳\times۲۰=۱۰۰$. مشاهده می‌شود که جواب مسأله با حالت قبل برابر است.

مثال۲: با ارقام صفر تا پنج، چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام وجود دارد که:

الف) زوج باشند. **ب) فرد باشند.** **ج) مضرب پنج باشند.**

د) بزرگتر از ۴۰۰ باشند. **هـ) مضرب سه باشند.** **و) حداقل شامل یکی از ارقام فرد باشند.**

پاسخ: الف) محدودیت‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ـ رقم یکان با توجه به زوج بودن فقط می‌تواند مقادیر ۰، ۲ یا ۴ را بگیرد. ۲ـ رقم صدگان باید یکی از ارقام ۱ تا ۵ باشد. ۳ـ هیچ دورقمی نباید یکی باشند. به راحتی مشخص است که انتخاب یا عدم انتخاب یک عدد زوج برای صدگان، رقم یکان را تحت‌تأثیر قرار می‌دهد. انتخاب عدد صفر برای یکان نیز صدگان را تحت‌تأثیر قرار می‌دهد. چاره‌ای نیست، باید از اصل جمع استفاده کنیم تا بر این تأثیر غلبه کنیم. جواب مسأله حاصل‌جمع دو حالت زیر می‌شود:

۱ـ رقم یکان برابر ۰ باشد: رقم صدگان ۵ حالت دارد و رقم دهگان نیز ۴ حالت خواهد داشت. کل حالات برابر با $۵\times۴\times۱=۲۰$ خواهد بود.

۲ـ رقم یکان برابر ۰ نباشد: رقم یکان ۲ حالت (۲ یا ۴)، رقم صدگان ۴ حالت (۱ تا ۵ به‌جز رقم یکان) و رقم دهگان ۴ حالت (۰ تا ۵ به‌جز دو رقم یکان و صدگان انتخاب‌شده) خواهند داشت. کل حالات برابر با $۴\times۴\times۲=۳۲$ خواهد بود.

طبق اصل جمع، جواب مسأله برابر $۲۰+۳۲=۵۲$ خواهد شد.

ب) محدودیت‌ها را بررسی می‌کنیم: ۱ـ رقم یکان باید ۱، ۳ یا ۵ باشد. ۲ـ رقم صدگان نباید صفر باشد. ۳ـ رقم‌ها باید با هم متفاوت باشند. مشاهده می‌شود در صورتی‌که ابتدا رقم یکان، بعد صدگان و بعد دهگان انتخاب شوند، محدودیت‌های همدیگر را تحت‌تأثیر قرار نمی‌دهند. برای رقم یکان ۳ حالت، برای صدگان ۴ حالت و برای دهگان نیز ۴ حالت داریم؛ در نتیجه جواب مسأله برابر با $۴\times۴\times۳=۴۸$ خواهد بود.

ج) در اینجا نیز مسأله را به دو زیرمسأله افراز می‌کنیم. جواب نهایی برابر حاصل این دو مقدار خواهد شد.

۱ـ رقم یکان ۰ باشد: در این حالت ۱ حالت برای رقم یکان، ۵ حالت برای رقم صدگان (رقم صفر برای یکان انتخاب شده است) و ۴ حالت برای دهگان داریم. پاسخ این حالت برابر با $۵\times۴\times۱=۲۰$ است.

۲ـ رقم یکان ۵ باشد: در این حالت ۱ حالت برای رقم یکان، ۴ حالت برای رقم صدگان و ۴ حالت برای رقم دهگان داریم. پاسخ این حالت برابر است با $۴\times۴\times۱=۱۶$.

پاسخ مسأله برابر مجموع پاسخ دو حالت فوق است، یعنی: $۲۰+۱۶=۳۶$.

د) در این حالت کافی است رقم صدگان یکی از ارقام ۴ یا ۵ باشد. ۲ حالت برای رقم صدگان خواهیم داشت، ۵ حالت برای رقم دهگان و ۴ حالت برای رقم یکان. در مجموع $۲\times۵\times۴=۴۰$ حالت خواهیم داشت.

هـ) اعدادی مضرب ۳ هستند که مجموع ارقامشان مضرب ۳ باشد. می‌بایست حالت‌هایی که مجموع ارقام مضرب ۳ باشد را مشخص کنیم و تعداد اعداد ساخته شده با این ارقام را محاسبه کنیم و سه‌تایی‌های $\{۳,۴,۵\}$، $\{۲,۳,۴\}$، $\{۱,۳,۵\}$، $\{۱,۲,۳\}$، $\{۰,۴,۵\}$، $\{۰,۲,۴\}$، $\{۰,۱,۵\}$ و $\{۰,۱,۲\}$ مجموعه ارقامی هستند که مجموعشان بر ۳ بخش‌پذیر است. کافی است تعداد حالات ساخت اعداد ۳ رقمی با ۳ رقم هر مجموعه را محاسبه کنیم. مجموعه (سه‌تایی)هایی که شامل رقم ۰ هستند، برای رقم‌های صدگان، دهگان و یکانشان به ترتیب ۲، ۲ و ۱ حالت و در مجموع ۴ حالت انتخاب دارند و سایر مجموعه‌ها برای این سه رقم به ترتیب ۳، ۲ و ۱ حالت و در مجموع ۶ حالت انتخاب دارند. با توجه به اینکه ۴ مجموعه شامل عضو ۰ و ۴ مجموعه فاقد عضو ۰ هستند، مجموع تعداد اعداد ۳ رقمی با ارقام این مجموعه‌ها برابر با $۴\times۴+۴\times۶=۴۰$ است.

و) تعداد کل اعداد سه‌رقمی که با این شش رقم ساخته می‌شوند، برابر است با: $۵\times۵\times۴=۱۰۰$

حال تعداد اعدادی که با ارقام $\{۰,۲,۴\}$ می‌توان ساخت را از تعداد کل کم می‌کنیم. خواهیم داشت: $۱۰۰-(۲\times۲\times۱)=۱۰۰-۴=۹۶$

پس ۹۶ عدد می‌توان ساخت که حداقل شامل یکی از ارقام فرد باشد.

برای محاسبه جواب هر یک از بخش‌های (الف) یا (ب) در این مثال، اگر حاصل‌جمع جواب این دو مسأله را داشته باشیم با توجه به اینکه می‌دانیم هر عدد یا زوج است یا فرد می‌توانیم از جواب یک بخش برای محاسبه جواب بخش دیگر کمک بگیریم. مثلاً برای محاسبه تعداد اعداد زوج با فرض اینکه تعداد اعداد فرد را بدانیم، می‌توان نوشت:

تعداد اعداد زوج =تعداد کل اعداد منهای تعداد اعداد فرد= $۱۰۰-۴۸=۵۲$

مثال۳: کلیه‌ی اعداد ۳رقمی با رقم‌های متمایز انتخاب شده از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را با هم جمع می‌کنیم. حاصل‌جمع کدام است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) ۱۳۳۲۰ ۲) ۱۹۹۸۰ ۳) ۱۳۹۸۶ ۴) ۱۹۹۸۶۰

پاسخ: گزینه «۲» برای حل این مسأله کافیست تعداد حالاتی که در آنها رقم k به ازای $k\in\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ در هر یک از جایگاه‌های یکان، دهگان و صدگان قرار می‌گیرد را محاسبه کنیم. رقم k در ۱۲ عدد در جایگاه صدگان، در ۱۲ عدد در جایگاه دهگان و در ۱۲ عدد در جایگاه یکان قرار می‌گیرد. عدد ۱۲ از تعداد حالات نوشتن ۴ رقم متمایز در ۲ جایگاه متمایز بدون تکرار محاسبه شده است. کافیست تأثیر هر رقم در جایگاه‌های متفاوت را به طور جداگانه لحاظ کنیم.

$$\text{جواب}=(۱+۲+۳+۴+۵)\times۱۲\times(۱۰۰+۱۰+۱)=۱۵\times۱۲\times۱۱۱=۱۹۹۸۰$$

مثال۴: با ارقام ۱ تا ۶ چند عدد شش رقمی با رقم‌های متمایز می‌توان ساخت که مجموع رقم‌های اول و ششم و مجموع رقم‌های دوم و پنجم با هم برابر باشد؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۴)

۱) 6×2^{3} ۲) 7×2^{4} ۳) 7×2^{3} ۴) 6×2^{4}

پاسخ: گزینه «۲» اعضایی‌که جمعشان برابر است شامل مجموعه $\{((2,5),(1,6))$ و $((3,4),(1,6))$ و $((2,4),(1,5))$ و $((2,3),(1,4))$ و $((3,6),(4,5))$ و $((3,5),(2,6))$ و $((3,4),(2,5))\}$ هستند. ۷ حالت برای انتخاب یکی از مجموعه‌ها داریم.
۴ حالت برای انتخاب رقم اول داریم. ۲ حالت برای انتخاب رقم دوم داریم. ۲ حالت برای انتخاب رقم سوم داریم. برای رقم‌های چهارم و پنجم و ششم هر کدام یک حالت داریم. تعداد کل حالات برابر است با: $7\times 4\times 2\times 2=7\times 2^{4}$

مثال۵: حاصل‌ضرب چه تعداد از زیرمجموعه‌های غیرتهی مجموعه $\{1,2,3,...,15\}$ مضرب ۶ است؟

۱) $2^{15}-2^{10}-2^{8}+2^{5}$ ۲) $2^{12}+2^{10}$ ۳) $2^{15}-2^{13}-2^{12}$ ۴) $3\times 2^{12}+2^{10}$

پاسخ: گزینه «۱» کافی‌است تعداد کل زیرمجموعه‌های این مجموعه را منهای تعداد زیرمجموعه‌هایی نمائیم که حاصل‌ضرب اعضای آن‌ها مضرب ۶ نیست. تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر 2^{15} است. مجموعه‌هایی که حاصل‌ضرب اعضای آن‌ها مضرب ۶ نیست، هیچ‌یک از اعضای $\{6,12\}$ را ندارند و حداکثر اعضای یکی از دو مجموعه $\{2,4,8,10,14\}$ و $\{3,9,15\}$ در آن‌ها وجود دارد. تعداد حالات انتخاب یک زیرمجموعه از دو مجموعه معرفی شده که از هر دو مجموعه، عضو نداشته باشد برابر با $(2^{3}+2^{5}-1)$ می‌باشد. کافیست تعداد زیرمجموعه‌های هر دو مجموعه را جمع نماییم. با توجه به اینکه مجموعه تهی دو مرتبه شمارش می‌شود از این مقدار یک واحد کم شده است. اعضای مجموعه $\{1,5,7,11,13\}$ تأثیری در شرط مسأله ندارند و هرکدام ۲ حالت برای حضور یا عدم حضور در زیرمجموعه‌ها دارند و در مجموع 2^{5} حالت خواهند داشت. جواب مسأله برابر است با:

$$2^{15}-(2^{3}+2^{5}-1)2^{5}=2^{15}-2^{10}-2^{8}+2^{5}$$

در این شمارش، مجموعه تهی جزئی از مجموعه زیرمجموعه‌هایی قرار گرفت که حاصل‌ضرب اعضای آن‌ها مضرب ۶ نبوده است.

مثال۶: تعداد زیرمجموعه‌های $\{0,1,2,...,10\}$ که در آن ۵ عضو ماکزیمم آن مجموعه است، برابر است با: (ریاضی ـ سراسری ۹۳)

۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

پاسخ: گزینه «۳» کافی است تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{0,1,2,3,4\}$ را محاسبه کنیم و به هر زیرمجموعه عضو ۵ را بیفزاییم که این تعداد زیرمجموعه‌ها برابر است با $2^{5}=32$. زیرا طبق اصل ضرب، هر عضو ۲ حالت انتخاب (حضور یا عدم حضور در زیرمجموعه) دارد.

مثال۷: در چه تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $\{3,4,...,15\}$ حاصل‌ضرب کمترین و بیشترین عضو زیرمجموعه کوچکتر از ۵۰ است؟

۱) ۹۰ ۲) ۴۵ ۳) ۱۱۰ ۴) ۴۳۷۳

پاسخ: گزینه «۴» هر زیرمجموعه از مجموعه اعداد $\{3,4,...,15\}$ دارای کوچکترین عضو است. می‌توان به ازای مقادیر مختلف این کوچکترین عضوها، تعداد زیرمجموعه‌های قابل قبول را محاسبه نمائیم. اگر کوچکترین عضو زیرمجموعه برابر ۳ باشد، برای بزرگترین عضو مجموعه محدودیتی نداریم؛ زیرا حاصل‌ضرب این عدد در بزرگترین عضو مجموعه (عدد ۱۵) نیز کوچکتر از ۵۰ خواهد بود. برای حالت‌هایی که کوچکترین عضو برابر ۴، ۵، ۶ یا ۷ باشد، مقدار برای بزرگترین عضو زیرمجموعه به ترتیب برابر ۱۲، ۹، ۸ و ۷ خواهد بود. با توجه به اینکه حاصل‌ضرب کوچکترین و بزرگترین عضو مجموعه می‌بایست کوچکتر از ۵۰ باشد، حداکثر مقدار قابل قبول برای کوچکترین عضو زیرمجموعه‌ها برابر ۷ است. اگر a کوچکترین مقدار زیرمجموعه و b بزرگترین مقدار مجاز زیرمجموعه باشد، تعداد زیرمجموعه‌های مجاز برابر 2^{b-a} خواهد بود؛ زیرا عضو a باید در زیرمجموعه باشد و هر عضو کوچکتر مساوی b می‌تواند در مجموعه باشد یا نباشد. تعداد زیرمجموعه‌های مجاز برابر است با:

$$2^{12}+2^{8}+2^{4}+2^{2}+2^{0}=4096+256+16+4+1=4373$$

مثال۸: تعداد ماتریس‌های $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ را بیابید که $x,y,z,w\in\{0,1,...,19\}$ و مقدار دترمینان آن عددی زوج است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۳)

۱) ۱۰۰,۰۰۰ ۲) ۱۰۷۰۰ ۳) ۸۰,۰۰۰ ۴) ۱۰۶۰۰

مثال ۱: کدام‌یک از جملات زیر یک گزاره نیست؟

۱) مربع هر عدد حقیقی از آن عدد بزرگتر است.
۲) مربع هر عدد صحیح از آن عدد کوچکتر نیست.
۳) تعداد ستاره‌های کهکشان عددی فرد است.
۴) روز جمعه سالن سینما تعداد زیادی صندلی خالی داشت.

پاسخ: گزینه «۴» جمله گزینه (۱) عبارتی است که ارزش آن نادرست است، پس یک گزاره خواهد بود. عبارت گزینه (۲) نیز عبارتی صحیح است. در نتیجه یک گزاره است. عبارت گزینه (۳) خبری را می‌رساند. این خبر ارزشی درست یا نادرست خواهد داشت ولی از صحت آن اطلاع نداریم. در نتیجه این جمله نیز یک گزاره خواهد بود. در جمله گزینه (۴) از عبارت «تعداد زیاد» استفاده شده است که قطعیت را با توجه به طرز تفکر هر فرد نقض می‌کند. در نتیجه این جمله نمی‌تواند یک گزاره باشد.

همان‌گونه که در تعریف گزاره بیان شد، یکی از شرایط گزاره بودن یک عبارت این است که تمام افراد جامعه باید نظر مشابهی نسبت به درستی آن عبارت داشته باشند. به عنوان مثال عبارت «سؤالات آزمون کارشناسی ارشد سال گذشته مهندسی کامپیوتر سخت بود» عبارتی است که ارزش آن بین جامعه شرکت‌کنندگان در آزمون و طراحان سؤال الزاماً برابر نیست و با توجه به میزان مطالعه و اطلاعات افراد، شاهد نظرات متفاوتی در مورد این عبارت هستیم. در نتیجه این عبارت یک گزاره نیست.

نکته دیگری که باید در مورد گزاره‌ها بررسی نمود، وجود پارادوکس است. این جملات ممکن است حاوی خبری به نظر برسند، ولی گزاره نیستند. به عنوان مثال جمله زیر را در نظر بگیرید:

P : «ارزش عبارت P نادرست است»

جمله P ارزش خودش را نادرست معرفی کرده است. در صورتی که ارزش P نادرست باشد، خبر بیان شده نادرست می‌باشد و جمله P باید درست باشد. در صورتی که ارزش P درست باشد، ارزش P با عبارت P در تناقض است. در نتیجه P شرایط یک گزاره را ندارد و گزاره نیست.

ترکیب گزاره‌ها

گزاره‌ای که قابل تجزیه شدن به گزاره‌های دیگر نباشد، **گزاره ساده یا اتمی (Simple Proposition)** نامیده می‌شود. گزاره‌ای که از ترکیب چند گزاره‌ی ساده تشکیل شده است، **گزاره مرکب (Compound Proposition)** نامیده می‌شود. این ترکیب از اعمال یک یا چند **عملگر (Operator)** روی چند گزاره ساده یا مرکب صورت می‌گیرد. گزاره‌هایی مانند «هوا بارانی است» و «سینما می‌روم» گزاره‌های ساده یا اتمی هستند. در گفتار و نوشتار روزمره گزاره‌ها را با استفاده از رابطه‌هایی مانند (and) و یا (or) با هم ترکیب کرده و به گزاره‌های مرکب می‌رسیم. به چنین رابطه‌هایی عملگر گفته می‌شود که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

عملگر نقیض (NOT): این عملگر تنها روی یک عملوند (گزاره) عمل می‌کند و مقدار ورودی خود را معکوس می‌کند. اگر ارزش عملوند False باشد، آن را True می‌کند و اگر True باشد، آن را False می‌کند. به عبارت دیگر، گزاره نادرست را به درست و گزاره درست را به نادرست تغییر می‌دهد. اگر p یک گزاره باشد، آنگاه «چنین نیست که p» را نقیض p می‌نامیم و با علامت $\sim p$ ، $\neg p$ یا $\overline{p}$ نمایش می‌دهیم.

عملگر ترکیب عطفی ($\wedge$ یا AND): این عملگر یک عملگر دوتایی است. یعنی دو عملوند را دریافت کرده و آنها را با هم ترکیب عطفی می‌کند. ترکیب عطفی p و q به صورت $p \wedge q$ ، pq یا $p.q$ نشان داده می‌شود. این گزاره در صورتی ارزش True دارد که p و q هر دو True باشند. در واقع در منطق دودویی، ترکیب عطفی دو عملوند با حاصل‌ضرب و همچنین مقدار کمینه آن‌ها برابر است.

عملگر ترکیب فصلی ($\vee$ یا OR): این عملگر نیز یک عملگر دوتایی است. ترکیب فصلی p و q به صورت $p \vee q$ یا $p+q$ نشان داده می‌شود. این گزاره در صورتی ارزش False دارد که هم p و هم q هر دو False باشد. در واقع در منطق دودویی، ترکیب فصلی دو عملوند با مقدار بیشینه و حاصل‌جمع آن دو عملوند برابر است (در صورتی که مقدار حاصل بزرگ‌تر از ۰ باشد، آن را برابر ۱ می‌گیریم).

به عنوان مثال، فرض کنید که دو گزاره p و q به صورت زیر تعریف شده باشند:

p : عدد ۴ یک عدد فرد است.

q : عدد ۸ یک عدد زوج است.

در این صورت ترکیب عطفی دو گزاره p و q به صورت زیر می‌باشد:

$p \wedge q$: عدد ۴ یک عدد فرد است و عدد ۸ یک عدد زوج است.

ترکیب فصلی p و q نیز به صورت مقابل می‌باشد: $p \vee q$: عدد ۴ یک عدد فرد است یا عدد ۸ یک عدد زوج است.

مثال ۲: ارزش دو عبارت A و B را مشخص نمایید.

A: پنج عدد اول یک رقمی وجود دارد یا اعداد طبیعی نسبت به عمل تفریق بسته‌اند.

B: این‌طور نیست که پنج عدد اول یک رقمی وجود دارد و اعداد طبیعی نسبت به عمل تفریق بسته‌اند.

۱) A: درست B: درست
۲) A: درست B: نادرست
۳) A: نادرست B: درست
۴) A: نادرست B: نادرست

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» فرض کنید داشته باشیم:

p : پنج عدد اول یک رقمی وجود دارد.		q: اعداد طبیعی نسبت به عمل تفریق بسته‌اند.

در این صورت ارزش گزاره‌های p و q نادرست است. ارزش عبارت‌های A و B به شکل زیر خواهد بود:

$$B = \sim p \wedge q = \sim F \wedge F = T \wedge F = F \qquad A = p \vee q = F \vee F = F$$

در نتیجه هر دو عبارت A و B نادرست خواهند بود.

عملگر یای مانع جمع(یای انحصاری، $\veebar$ ، $\oplus$ یا XOR): این عملگر یک عملگر دوتایی است و ارزش آن در صورتی درست خواهد بود که فقط یکی از گزاره‌های اولیه درست باشند. به عبارت دیگر، عبارت $p \oplus q$ زمانی درست است که تعداد فردی از عملوندهایش درست باشد.
عملگرهای پایه‌ای منطق عبارتند از AND، OR و NOT . بقیه عملگرها را می‌توان با ترکیب این عملگرها به دست آورد. به عنوان مثال، عملگر یای مانع جمع را می‌توان از رابطه روبرو به دست آورد: $p \oplus q \equiv (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q)$

عملگر نقیض یای مانع جمع ($\odot$ یا XNOR) : این عملگر عکس عملگر XOR عمل می‌کند. به عبارت دیگر، هنگامی خروجی True است که هر دو عملوند آن مقداری برابر داشته باشند یا تعداد زوجی از عملوندهای آن درست باشد، این عملگر را می‌توان با استفاده از عملگرهای مقدماتی به صورت زیر نوشت: $p \odot q \equiv (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$

عملگر NOR ($\downarrow$): این عملگر عکس عملگر AND عمل می‌کند؛ یعنی هنگامی خروجی آن True است که هر دو ورودی برابر False باشند. با استفاده از ترکیب عملگرهای OR و NOT این عملگر را می‌توان به صورت روبه‌رو نوشت: $p \downarrow q \equiv \overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}$

عملگر NAND ($\uparrow$): این عملگر عکس عملگر OR عمل می‌کند؛ یعنی اگر دو ورودی برابر True باشند، خروجی False می‌شود. با استفاده از ترکیب عملگرهای AND و NOT این عملگر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$p \uparrow q \equiv \overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$$

عملگر ترکیب شرطی ($\rightarrow$): اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره «اگر p آنگاه q» را ترکیب شرطی p با q می‌نامیم. حاصل این گزاره تنها در صورتی نادرست است که از یک فرض درست به یک نتیجه نادرست برسیم یا به عبارت دیگر، زمانی که p (مقدم) درست و q (تالی) نادرست باشد؛ بنابراین رابطه این عملگر به صورت مقابل است: $p \rightarrow q \equiv \overline{p} \vee q$

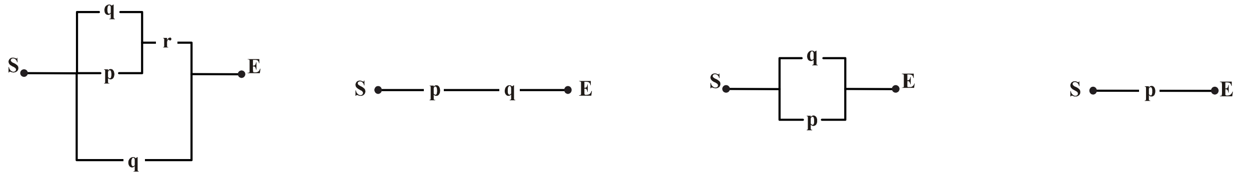
عملگر ترکیب دوشرطی ($\leftrightarrow$): اگر p و q دو گزاره باشند، آنگاه گزاره «p اگر و تنها اگر q» (که ترکیب عطفی دو گزاره شرطی $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow p$ می‌باشند) را ترکیب دوشرطی دو گزاره p و q می‌نامیم. تنها در صورتی حاصل این عملگر درست است که دو گزاره q و p دارای ارزش یکسانی باشند. در واقع، عملگر هم‌ارزی با عملگر XNOR معادل است. عبارت این عملگر به صورت زیر می‌باشد:

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

عملگرهای معرفی شده برای ترکیب جملات صحبت‌های روزمره نیز کارایی دارند. عملگر نقیض باعث منفی شدن گزاره (جمله) می‌شود. به عنوان مثال گزاره «من فردا به دانشگاه می‌روم» با عملگر نقیض به گزاره «من فردا به دانشگاه نمی‌روم» تغییر می‌کند. ارزش گزاره نقیض معکوس گزاره اولیه است. عملگرهای ترکیب عطفی و فصلی نیز برای ترکیب جملات روزمره کارایی دارند.

به عنوان مثال، برای دو گزاره ساده «فردا هوا بارانی است» و «فردا تعطیل است» ترکیب عطفی به‌صورت «فردا هوا بارانی است و فردا تعطیل است» و ترکیب فصلی به‌صورت «فردا هوا بارانی است یا فردا تعطیل است» خواهد بود که با حذف عبارت‌های تکراری به دو جمله «فردا هوا بارانی است و تعطیل است» و «فردا هوا بارانی است یا تعطیل است» می‌رسیم. صحت این دو عبارت نیز به ترتیب زمانی که هر دو گزاره ساده صحیح باشند یا حداقل یکی از گزاره‌های ساده صحیح باشد، صحیح خواهد بود. ترکیب شرطی این دو گزاره نیز با توجه به ساختار زبان به شکل «اگر فردا هوا بارانی باشد، تعطیل خواهد بود» می‌باشد. صحت این گزاره نیز زمانی است که یا جمله فرض نادرست باشد (هوا بارانی نباشد) یا جمله حکم درست باشد (فردا تعطیل باشد).
سایر عملگرهای معرفی شده مانند یای مانع جمع در گفتگوهای روزمره کاربرد کمی دارند و معمولاً از ترکیب سایر عملگرها در بیان گزاره‌های معادل آن‌ها استفاده می‌شود. ساختار معادل یای انحصاری که گاه استفاده می‌شود، برای دو گزاره بیان شده به‌صورت «یا فردا هوا بارانی است یا فردا تعطیل است» می‌باشد. ولی بیشتر کاربرد این ساختار برای تأکید روی ترکیب فصلی یا تأکید روی نقیض ترکیب عطفی است و همیشه کاربرد یای انحصاری را ندارد، مانند گزاره «یا جای من اینجاست یا جای تو» که تأکید بر نقیض ترکیب عطفی است.

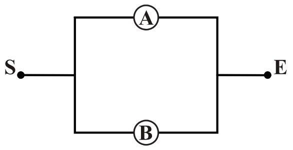
مثال ۳: فرض کنید می‌خواهیم وضعیت اتصال دو نقطه E و S را با توجه به وضعیت کلیدهای p،q،r و p بررسی کنیم. وضعیت مدار در شکل (الف) وقتی مقدار p برابر ۱ یا True باشد، اتصال برقرار است. برای شکل (ب) و (ج) هم به ترتیب وقتی مقدار $(p \vee q)$ و $(p \wedge q)$ برابر ۱ یا True باشد، برقرار است. با توجه به این فرضیات چه موقع در شکل (د) دو نقطه E و S به هم متصل خواهند بود؟



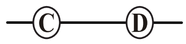
(الف) (ب) (ج) (د)

۱) وقتی عبارت $(p \wedge \overline{q}) \vee r$ درست باشد.
۲) وقتی عبارت $q \vee (p \wedge r)$ درست باشد.
۳) وقتی عبارت $(p \vee q) \wedge r$ درست باشد.
۴) وقتی عبارت $r \vee \overline{q}$ درست باشد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» مدار شکل (د) را می‌توان به صورت مقابل نمایش داد:



که مدار بخش A نیز به صورت زیر قابل نمایش است.



مدار بخش C معادل $p \vee q$ و مدار بخش D معادل r است. مقدار مدار A از رابطه $C \wedge D$ محاسبه می‌گردد. در نتیجه، عبارت معادل به صورت $A \equiv (p \vee q) \wedge r$ است. مدار معادل شکل B هم‌ارز با $\overline{q}$ است.

با توجه به شکل، وضعیت اتصال S به E معادل $A \vee B$ است. خواهیم داشت: $A \vee B \equiv ((p \vee q) \wedge r) \equiv (p \vee q \vee \overline{q}) \wedge (r \vee \overline{q}) \equiv r \vee \overline{q}$

❖ **تعریف فرمول خوش تعریف (Well Formed Formula):** یک فرمول خوش تعریف (خوش ترکیب) عبارتی مرکب از تعداد متناهی عملگر و متغیر است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

ـ هر متغیر یک فرمول خوش تعریف است.

ـ اگر p یک فرمول خوش تعریف باشد، آنگاه $\sim p$ و (p) نیز خوش تعریف هستند.

ـ اگر p و q خوش تعریف باشند، آنگاه $p * q$ نیز خوش تعریف است (منظور از * هر یک از عملگرهای دوتایی معرفی شده است).

طبق این تعریف عبارت $p \vee$ یک فرمول خوش تعریف نیست، ولی $p \wedge q \vee r$ خوش تعریف است. حال فرض کنید بخواهیم ارزش این عبارت خوش تعریف را با فرض اینکه می‌دانیم p نادرست و q و r درست هستند، محاسبه نمائیم. مشاهده می‌شود در صورتی که ابتدا عملگر $\wedge$ و سپس عملگر $\vee$ اعمال شود به عبارت «درست» و در صورتی که ابتدا عملگر $\vee$ و سپس عملگر $\wedge$ اعمال شود به عبارت «نادرست» می‌رسیم. برای اینکه هر عبارت خوش تعریف ارزش یکتایی داشته باشد، برای عملگرهای معرفی شده اولویتی در نظر گرفته شده است. ترتیب اولویت عملگرها در جدول زیر آمده است:

نماد	عملگر
$( )$	پرانتز
$\sim$	نقیض
$\wedge$	ترکیب عطفی
$\vee$	ترکیب فصلی
$\rightarrow$	ترکیب شرطی
$\leftrightarrow$	ترکیب دوشرطی

عملگرهایی که در قسمت‌های بالاتر این جدول آمده‌اند اولویت بالاتری دارند و زودتر اعمال می‌شوند. با توجه به این ترتیب اولویت، در عبارت $p \wedge q \vee r$ ابتدا عملگر $\wedge$ و سپس عملگر $\vee$ اعمال خواهد شد. در صورتی که بخواهیم ترتیب این عملگرها را عوض کنیم می‌توانیم از پرانتز استفاده نمائیم. به عنوان مثال در عبارت $p \wedge (q \vee r)$ عملگر $\vee$ زودتر از $\wedge$ اعمال می‌شود.

مثال ۴: در عبارت $\sim (q \vee r) \wedge s$ اعمال عملگرها به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $\sim, \vee, \wedge$
۲) $\wedge, \sim, \vee$
۳) $\wedge, \vee, \sim$
۴) $\vee, \wedge, \sim$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» عملگر $\wedge$ بین نقیض یک پرانتز و متغیر s قرار دارد و تا زمانی که نقیض مقدار داخل پرانتز محاسبه نشود، اعمال نمی‌شود. عملگر $\vee$ بین متغیرهای q و r قرار دارد. عملگر نقیض در کنار یک پرانتز قرار دارد. بیشترین اولویت با پرانتز است و عبارت داخل پرانتز در ابتدا محاسبه می‌گردد. در نتیجه اول از همه عملگر $\vee$ اعمال می‌شود. بین دو عملگر ترکیب عطفی و نقیض، اولویت نقیض بالاتر است و زودتر اعمال می‌شود.

❖ **تعریف گزاره‌ی همواره درست، درست‌نما یا راستگو (Tautology):** گزاره‌ای که ارزش آن همواره درست است، **درست نما** نامیده می‌شود.
به‌عنوان مثال عبارت « هر عدد مضرب ۴، زوج است» یک درست نما است. در حالت کلی تمام قضایای اثبات شده درست نما می‌باشند.

❖ **تعریف گزاره همواره نادرست یا تناقض (Contradiction):** گزاره‌ای که ارزش آن همواره نادرست باشد، **تناقض** نامیده می‌شود.
به عنوان مثال عبارت «تمام اعداد اول فرد هستند» یک تناقض است.

مثال ۵: کدام گزینه یک تناقض است؟

۱) ترکیب عطفی دو درست نما   ۲) ترکیب فصلی دو درست نما   ۳) ترکیب شرطی دو درست نما   ۴) نقیض یک درست نما

☑ **پاسخ :** گزینه «۴» ترکیب‌های عطفی، فصلی، شرطی و دو شرطی دو درست نما، همواره درست نما و نقیض یک درست نما، تناقض است.

مثال ۶: اگر p و q دو گزاره باشند، کدام گزینه درست نما است؟

۱) $p\vee\sim p$ ۲) $p\wedge\sim p$

۳) $(p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)$ ۴) $(p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» عبارت گزینه (۱) یک درست نما، عبارت گزینه (۲) یک تناقض هستند و عبارت گزینه‌های (۳) و (۴) دو گزاره مرکب هستند که ارزش آنها به ارزش p و q بستگی دارد.

جدول درستی (جدول صحت)

ارزش درستی گزاره‌های مرکب را می‌توان با جداول صحت آن‌ها توصیف کرد. جدول صحت گزاره مرکب p که از گزاره‌های ساده $p_1, p_2, \cdots, p_n$ تشکیل شده است، شامل لیستی از تمام ترکیب‌های ممکن ارزش درستی گزاره‌های p_1 تا p_n می‌باشد. در این جدول از T یا ۱ برای نمایش درست و از F یا ۰ برای نمایش نادرست استفاده می‌شود؛ بنابراین اگر یک گزاره‌ی مرکب از n گزاره‌ی اتمی تشکیل شده باشد، آنگاه جدول صحت دارای 2^n سطر خواهد بود.
جدول صحت عملگرهای معرفی شده به صورت زیر می‌باشد:

p	q	$\bar{p}$	$p\vee q$	$p\wedge q$	$p\oplus q$	$p\odot q$	$p\downarrow q$	$p\uparrow q$	$p\to q$	$q\to p$	p/q	q/p
۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱
۱	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۰
۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰	۱	۱	۰	۰

دو ستون آخر جدول فوق به ترتیب عملگرهای نهی p و نهی q می‌باشند که فرمول آنها در مقابل آمده است: $q/p\equiv\bar{p}\wedge q$ $p/q\equiv p\wedge\bar{q}$

نکته ۱: اگر n متغیر p_1، p_2، ... و p_n در منطق دودویی داشته باشیم، می‌توانیم 2^{2^n} تابع دودویی تعریف نماییم. به عنوان مثال، برای دو متغیر می‌توان ۱۶ تابع تعریف کرد.

مثال ۷: به ازای چند حالت از مقادیر p و q، ارزش عبارت $A=(p\vee q)\wedge(\sim p\vee\sim q)$ درست است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» با توجه به جدول صحت، در دو حالت از مقادیر p و q ارزش عبارت A درست خواهد شد.

p	q	$p\vee q$	$\sim p\vee\sim q$	A
F	F	F	T	F
F	T	T	T	T
T	F	T	T	T
T	T	T	F	F

مثال ۸: گزاره A برای چه تعداد از مقادیر (p,q,r) معتبر نیست؟ $A:(p\wedge(\sim q\vee r))\to(q\leftrightarrow r)$

۱) ۰   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌توان جدول درستی فرض و حکم عبارت A را تشکیل داد. مقادیری از جدول که ارزش فرض عبارت درست و ارزش حکم نادرست باشد، مقادیر نامعتبر هستند.

p	q	r	$p\wedge(\sim q\vee r)$	$q\leftrightarrow r$	A
०	०	०	०	۱	۱
०	०	۱	०	०	۱
०	۱	०	०	०	۱
०	۱	۱	०	۱	۱
۱	०	०	۱	۱	۱
۱	०	۱	۱	०	०
۱	۱	०	०	०	۱
۱	۱	۱	۱	۱	۱

تنها به ازای سه‌تایی $(1,0,1)$ ارزش عبارت A نادرست خواهد بود.

مثال ۹: عبارت $A\rightarrow B$ با فرض $B=p\vee\sim q$ به ازای کدام مقدار A یک درست نما است؟

۱) $\sim p$ ۲) q ۳) $\sim p\vee\sim q$ ۴) $p\wedge q$

پاسخ: گزینه «۴» عبارت $A\rightarrow B$ زمانی درست نما است که به ازای تمام حالاتی که B نادرست باشد، A نیز نادرست باشد. طبق جدول صحت زیر، مقدار A برابر با عبارت گزینه (۴) خواهد بود.

p	q	$p\vee\sim q$	$\sim p$	q	$\sim p\vee\sim q$	$p\wedge q$
F	F	T	T	F	T	F
F	T	F	T	T	T	F
T	F	T	F	F	T	F
T	T	T	F	T	F	T

وابستگی ارزش

اگر بتوان ارزش یک گزاره q را از روی ارزش گزاره p محدود کرد، گزاره‌ی q را وابسته ارزشی (تابع ارزش) گزاره‌ی p می‌نامند. دو گزاره‌ی ساده که وابسته ارزشی یکدیگر باشند، نسبت به هم یکی از سه حالت برابری، هم‌ارزی یا ناهم‌ارزی را خواهند داشت.

حالت برابری (همانی): دو گزاره A و B برابرند، هرگاه کاملاً مشابه هم باشند. به عنوان مثال گزاره‌های $A=p\vee q$ و $B=p\vee q$ با هم برابرند.

حالت هم‌ارزی: شرط برابری شرط سختی است و کاربرد محدودی دارد و برای مقایسه دو گزاره معمولاً از شرط هم‌ارزی استفاده می‌شود. دو گزاره A و B هم‌ارزند هرگاه ارزش برابری داشته باشند. به عبارت دیگر گزاره A با گزاره B هم‌ارز است اگر در حالتی که A درست باشد، B نیز درست باشد و حالتی که A نادرست باشد، B نیز نادرست باشد. مانند دو گزاره $A=p$ و $B=A\vee(p\wedge q)$. برای نمایش هم‌ارزی گزاره‌ها از نمادهای $A\equiv B$ و $A\Leftrightarrow B$ استفاده می‌شود.

حالت ناهم‌ارزی (تباین): دو گزاره که هم‌ارز نباشند، ناهم‌ارز نامیده می‌شوند. در این صورت این دو گزاره نسبت به هم حالت‌های نا‌ارزی، ناسازگاری، سازگاری و درون‌ارزی را می‌توانند داشته باشند.

ـ ناارزی (نفی یا تناقض): دو گزاره A و B ناارزند، اگر در صورتی که A درست باشد، B نادرست باشد و هنگامی که A نادرست باشد، B درست باشد. به عبارتی داشته باشیم $A\equiv\sim B$.

سازگاری (سازش‌پذیری): گزاره‌هایی که بتوانند با هم درست باشند، سازگار هستند. به بیان دیگر دو یا چند گزاره سازگار هستند اگر ترکیب عطفی آن‌ها تناقض نباشد. در صورتی که دو گزاره (یا مجموعه‌ای از گزاره‌ها) سازگار نباشند، **ناسازگار** نامیده می‌شوند.

درون‌ارزی (تداخل): هرگاه دو گزاره A و B چنان باشند که درستی A درستی B را نتیجه دهد و نادرستی B نادرستی A را نتیجه دهد، گفته می‌شود در این‌صورت گزاره‌ی A نسبت به گزاره‌ی B درون‌ارز یا متداخل است. در چنین وضعی اگر گزاره‌ی A نادرست باشد، گزاره B ممکن است درست یا نادرست باشد.

توجه نمائید که شرایط ناهم‌ارزی الزاماً با هم در تناقض نیستند. به عنوان مثال دو گزاره هم می‌توانند سازگار باشند و هم یکی از آنها نسبت به دیگری خاصیت درون ارزی داشته باشد.

مثال۱۰: گزاره‌های کدام مجموعه سازگار نیستند؟

۱) $\{p \to q, q \to r, r \to \sim s\}$
۲) $\{p \to q, q \to p, \sim r, r \to p\}$
۳) $\{p \to q, \sim p \to r, \sim(q \vee r)\}$
۴) $\{p \to \sim q, q \to \sim r, r \to \sim p\}$

پاسخ: گزینه «۳» مجموعه گزینه (۱) سازگار است. زیرا به ازای مقادیر $p \equiv q \equiv r \equiv s \equiv \text{False}$ همه گزاره‌ها درست خواهند بود. مجموعه گزینه (۲) نیز سازگار است. زیرا به ازای مقادیر $p \equiv q \equiv \sim r \equiv \text{True}$ همه گزاره‌ها درست خواهند بود. مجموعه گزینه (۴) نیز با توجه به مقادیر $p \equiv q \equiv r \equiv \text{False}$ سازگار است. ولی در مجموعه گزینه (۳) با توجه به گزاره $\sim(q \vee r)$ مقادیر q و r برابر False خواهد بود. در نتیجه یکی از دو گزاره $p \to q$ یا $\sim p \to r$ نادرست است و این مجموعه سازگار نخواهد بود.

مثال۱۱: کدام‌یک از مجموعه‌های زیر از گزاره‌ها سازگار است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۸۱)

۱) $\{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2\}$
۲) $\{p_0, p_0 \to p_1, p_1 \to p_1 \to \neg p_0\}$
۳) $\{p_0 \wedge p_1, p_1 \wedge p_2, \neg p_1\}$
۴) $\{p_0 \wedge p_1, p_1 \wedge p_2, \neg p_2\}$

پاسخ: گزینه «۱» در صورتی که همه اعضای مجموعه بتوانند با هم ارزش درست داشته باشند، آن مجموعه سازگار است به ازای $p_0 = p_1 = p_2 = \text{True}$ گزاره‌های مجموعه $\{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2\}$ درست خواهد بود.

قوانین هم‌ارزی گزاره‌ها

در تمام حوزه‌های ریاضی لازم است بدانیم که در چه موقع موجودات مورد مطالعه ما برابر یا اساساً یکی هستند. به عنوان مثال، در حساب و جبر دو عدد حقیقی غیرصفر وقتی برابرند که بزرگی و علامت جبری آن‌ها یکسان باشند یا این که در هندسه برای اثبات برابری دو مثلث از قضایای هم‌نهشتی استفاده می‌کنیم. اغلب به مطالعه منطق، مطالعه جبر گزاره‌ها گفته می‌شود. در این جبر نیاز است که بررسی کنیم در چه هنگام دو گزاره برابر هستند. بنابراین برای این کار از قوانین هم‌ارزی گزاره‌ها استفاده می‌کنیم. البته همواره می‌توان از رسم جدول صحت نیز استفاده کرد ولی این راه زمانبر است.

همان‌طور که در مبحث وابستگی ارزش گفته شد، دو گزاره A و B را هم‌ارز می‌نامیم هرگاه ارزش آن‌ها دقیقاً با هم برابر باشد. در این صورت خواهیم نوشت $A \equiv B$ یا $A \Leftrightarrow B$. دلیل بررسی قوانین هم‌ارزی گزاره‌ها، ساده‌سازی و بررسی هم‌ارز بودن آن‌هاست. در ادامه با تعدادی از این قوانین آشنا می‌شویم.

۱ـ قانون نقیض مضاعف	$\overline{\overline{p}} \Leftrightarrow p$
۲ـ قوانین دمورگان	$\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$ $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$
۳ـ قوانین جابه‌جایی	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
۴ـ قوانین شرکت‌پذیری	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
۵ـ قوانین توزیع‌پذیری	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
۶ـ قوانین خودتوانی	$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$
۷ـ قوانین همانی	$P \wedge T \Leftrightarrow P$ $P \vee F \Leftrightarrow P$
۸ـ قوانین وارون	$p \vee \sim p \Leftrightarrow T$ $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$
۹ـ قوانین غلبه	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$
۱۰ـ قوانین جذب	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
۱۱ـ قانون شبه جذب	$p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow p \wedge q$ $p \vee (\sim p \wedge q) \Leftrightarrow p \vee q$

درسنامه (۲): حل روابط بازگشتی

ابتدای فصل یک مثال از محاسبه و حل رابطه بازگشتی داشتیم. در این بخش می‌خواهیم روش‌های حل روابط بازگشتی همگن و ناهمگن را به ترتیب بررسی کنیم. منظور از حل یک رابطه بازگشتی یافتن تابعی صریح است که مقدار آن به ازای هر n، برابر جمله nاُم دنباله بازگشتی باشد. فرم کلی یک رابطه بازگشتی همگن مرتبه kاُم به صورت روبه‌رو می‌باشد: $c_n a_n + c_{n-1}a_{n-1} + \dots + c_{n-k}a_{n-k} = 0$

به منظور حل معادلات همگن از معادله مشخصه (Characteristic function) استفاده می‌کنیم. برای به دست آوردن معادله مشخصه کافیست در رابطه بازگشتی فوق جای a_n، عبارت r^n قرار دهیم و عبارت را بر r^k تقسیم کنیم که k کمترین توان موجود در رابطه است.

$$c_n r^n + c_{n-1}r^{n-1} + \cdots + c_{n-k}r^{n-k} = 0 \Rightarrow c_n r^k + c_{n-1}r^{k-1} + \cdots + c_{n-k-1}r + c_{n-k} = 0$$

در این حالت معادله بازگشتی تبدیل به یک چندجمله‌ای مرتبه kاُم می‌شود که ابتدا آن را حل می‌کنیم و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم؛ سپس با توجه به متمایز یا مشابه بودن این ریشه‌ها، رابطه بازگشتی همگن را حل می‌کنیم.

رابطه بازگشتی همگن مرتبه اول

به دنباله نامتناهی از اعداد همگن مانند $<3,6,12,24,48,\dots>$ یک سری هندسی گفته می‌شود. هرگاه خارج قسمت هر جمله (به غیر از جمله اول) بر جمله بلافاصله قبل از آن، مقدار ثابتی باشد، به این مقدار ثابت قدرنسبت گفته می‌شود. در دنباله بیان شده قدرنسبت برابر ۲ می‌باشد و داریم:

$a_1 = 6 = 2(3) = 2a_0 \qquad a_2 = 12 = 2(6) = 2a_1$

اگر $<a_0, a_1, a_2, \dots>$ یک سری هندسی باشد، آنگاه داریم: $\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \cdots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

r همان قدرنسبت است. در این سری هندسی خاص داریم: $a_{n+1} = 2a_n \;,\; n \ge 0$

$a_0 = 3$

معادله فوق را رابطه بازگشتی خطی مرتبه اول می‌گویند، زیرا مقدار a_{n+1} تنها به مقدار پیشین یعنی a_n وابسته است. هر کجا که a_{n+1} تنها به جمله بلافاصله قبل از خود وابسته باشد، رابطه را مرتبه اول می‌گویند. صورت کلی معادلات خطی مرتبه اول به صورت مقابل می‌باشد: $b_n = cb_{n-1} \;,\; (n \ge 1)$

که در روابط فوق c یک عدد ثابت می‌باشد. مقادیر جملات اولیه دنباله را بازنویسی می‌کنیم:

$a_0 = 3 \qquad a_1 = 2a_0 = 2(3)$

$a_2 = 2a_1 = 2(2a_0) = 2^2(3) \qquad a_3 = 2a_2 = 2(2a_1) = 2^2(2a_0) = 2^3(3)$

با توجه به این محاسبات این نتیجه‌گیری به ذهن القا می‌شود که به ازای هر $n \ge 0$ داریم $a_n = 2^n(3)$. به این جواب، جواب عمومی رابطه بازگشتی مفروض گفته می‌شود. در جواب عمومی مقدار a_n تنها به n بستگی دارد و دیگر هیچ وابستگی به جملات قبلی دنباله ندارد. به عنوان مثال، اگر بخواهیم a_{10} را حساب کنیم صرفاً مقدار $2^{10} \times 3$ را حساب می‌کنیم و دیگر لزومی ندارد که با a_0 شروع کرده و برای به دست آوردن a_{10}، ابتدا a_9 را حساب کنیم.

با توجه به مثال بیان شده به نتیجه‌گیری زیر می‌رسیم:

نکته ۱: جواب عمومی رابطه بازگشتی $a_n = ca_{n-1}$ به ازای $n \ge 1$ که در آن c ثابت است، به صورت $n \ge 0$ و $a_n = a_0 c^n$ محاسبه می‌شود.

مثال۳۳: حل رابطه بازگشتی $a_n = 5a_{n-1}$ به ازای $a_0 = 2$ کدام است؟

۱) $a_n = (\frac{5}{2})^n$ ۲) $a_n = (\frac{2}{5})^n$ ۳) $a_n = 2 \times 5^n$ ۴) $a_n = 5 \times 2^n$

پاسخ: گزینه «۳» معادله مشخصه رابطه بازگشتی را محاسبه می‌کنیم: $a_n = 5a_{n-1} \Rightarrow r^n = 5r^{n-1} \Rightarrow r = 5$

در نتیجه فرم کلی رابطه صریح دنباله بازگشتی به صورت $a_n = c5^n$ خواهد بود. برای محاسبه مقدار ثابت c، مقدار a_0 را در معادله قرار می‌دهیم. پس خواهیم داشت: $a_0 = 2 \Rightarrow c5^0 = 2 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow a_n = 2 \times 5^n$

با استفاده از نکته بیان شده، فرم کلی رابطه بازگشتی به صورت $a_n = c5^n$ محاسبه می‌گردد که در این حالت نیز با جایگذاری مقدار a_0، به جواب مسأله خواهیم رسید.

مثال۳۴: حل رابطه بازگشتی $a_n = 7a_{n-1}$ که در آن $n \ge 1$ و $a_2 = 98$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $3(7)^n$ ۲) $2(7)^n$ ۳) $2(7)^{n-1}$ ۴) $3(7)^{n-1}$

پاسخ: گزینه «۲» با توجه به نکته بیان شده، فرم صریح این معادله برابر $a_n = a_0(7)^n$ می‌باشد. مقدار a_0 به صورت زیر قابل محاسبه است:

$a_2 = 98 = a_0(7)^2 \Rightarrow a_0 = 2$

نکته ۲: رابطه بازگشتی به فرم $a_{n+1} - ca_n = 0$ که در آن هر جمله اندیس‌دار با توان یک ظاهر شده است را خطی می‌نامند. یک رابطه بازگشتی غیرخطی ممکن است با جایگذاری‌های خطی و تغییر متغیر به یک رابطه خطی قابل تبدیل باشد.

مثال ۳۵: جواب عمومی رابطه بازگشتی $a_{n+1}^2 = 4a_n^2$ که در آن به ازای $n \geq 0$ داریم $a_n > 0$ و $a_0 = 3$ کدام است؟

۱) 3×2^n ۲) 9×4^n ۳) 4×3^n ۴) 2×3^n

پاسخ: گزینه «۱» رابطه داده شده با تغییر متغیر $b_n = a_n^2$ به رابطه جدید $b_{n+1} = 4b_n$ تبدیل می‌شود که در آن $b_0 = 9$. با توجه به نکته بیان شده این رابطه دارای جواب $b_n = 9 \times 4^n$ می‌باشد. بنابراین به ازای $n \geq 0$ داریم: $a_n = 3 \times 2^n$.

مثال ۳۶: ۱۰ کتاب از ۵ نوع (از هر نوع کتاب دقیقاً ۲ جلد مشابه) را می‌خواهیم بین ۵ نفر به نوعی تقسیم کنیم که به هر شخص دقیقاً ۲ کتاب از نوع متفاوت برسد. این کار به چند طریق ممکن است؟

۱) $\binom{10}{5}$ ۲) $\frac{8!}{16}$ ۳) $\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$ ۴) $\binom{10}{2}^5$

پاسخ: گزینه «۲» از هر نوع کتاب، ۲ جلد داریم و هر شخص نیز ۲ کتاب دریافت خواهد کرد. یکی از حالت‌های توزیع را می‌توان به شکل زیر مدل نمود.

	نوع ۱	نوع ۲	نوع ۳	نوع ۴	نوع ۵
شخص ۱	۰	۰	۱	۰	۱
شخص ۲	۱	۰	۱	۰	۰
شخص ۳	۰	۱	۰	۱	۰
شخص ۴	۱	۰	۰	۱	۰
شخص ۵	۰	۱	۰	۰	۱

در واقع حالت‌های توزیع کتاب‌ها با رعایت شروط صورت سؤال را می‌توان با یک ماتریس 5×5 که در هر سطر و هر ستون آن دقیقاً دو تا ۱ قرار دارد، نمایش داد. این ۱ها نشان می‌دهد که یک کتاب در اختیار یک فرد قرار می‌گیرد یا خیر. مشابه آنچه در مثال قبل داشتیم، رابطه صریح محاسبه شده از رابطه بازگشتی مسأله به صورت $A_n = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}}$ خواهد بود. در نتیجه: $A_5 = \frac{8!}{2^4}$

این مسأله با تعداد پریشه‌های اعداد ۱ تا ۵ تفاوت دارد. زیرا هر پریشه معادل با تعدادی ماتریس است که با توجه به شباهت بین سطرهای این ماتریس‌ها، تعداد ماتریس‌های معادل با یک پریشه الزاماً برابر نیست. از طرفی ممکن است ماتریس‌های متناظر با دو پریشه متفاوت با یکدیگر اشتراک داشته باشند. برای حالتی که مجموعه شامل اعداد ۱ تا ۴ است، پریشه ۳، ۴، ۱ و ۲ متناظر با ۶ ماتریس است که از جابجا نمودن سطرهای ماتریس M_1 ایجاد می‌شوند. از طرفی پریشه ۱، ۴، ۳ و ۲ متناظر با ۲۴ ماتریس است که از جابجا نمودن سطرهای ماتریس M_2 ایجاد می‌شوند، زیرا می‌توانیم ۴ سطر متمایز را به !۴ حالت جابجا نمائیم. ماتریس M_2 می‌تواند ماتریسی متناظر با پریشه ۳، ۲، ۱ و ۴ نیز باشد. با توجه به اینکه هر پریشه معادل با تعداد ثابتی ماتریس نیست، استفاده از رابطه پریشه در حل این سؤال موجب سخت‌تر شدن راه‌حل خواهد شد.

۱	۱	۰	۰
۱	۱	۰	۰
۰	۰	۱	۱
۰	۰	۱	۱

M_1

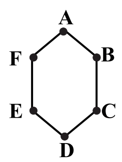
۱	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۱
۱	۰	۰	۱

M_2

مثال ۳۷: یک شش ضلعی داریم که رأس‌های آن به ترتیب ساعتگرد با حروف A تا F مشخص شده‌اند. قورباغه‌ای از رأس A شروع به جهیدن می‌کند و هربار از رأسی که در آن قرار دارد به یکی از دو رأس مجاور می‌پرد. وقتی قورباغه به رأس D رسید همان‌جا متوقف می‌شود. a_n را برابر تعداد مسیرهایی می‌گیریم که قورباغه از طریق آن‌ها با n جهش به D می‌رسد. a_{13} کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۹۴)

۱) ۲۴۳ ۲) ۴۸۶ ۳) صفر ۴) ۸۱

پاسخ: گزینه «۲» تعداد حالاتی که از A با ۱۳ گام به D می‌رسیم را می‌توان با مجموع حالاتی که از A با ۱۲ گام به C یا E می‌رسیم برابر دانست. اگر P_i را تعداد حالات رسیدن از خانه A به P با i حرکت بدانیم که P یکی از رئوس شش‌ضلعی است خواهیم داشت:



$$D_i = C_{i-1} + E_{i-1} = B_{i-2} + F_{i-2} = (A_{i-3} + C_{i-3}) + (A_{i-3} + E_{i-3})$$

$$= 2A_{i-3} + C_{i-3} + E_{i-3} = 2(B_{i-4} + F_{i-4}) + B_{i-4} + F_{i-4} = 3(B_{i-4} + F_{i-4}) = 3D_{i-2}$$

در این جایگذاری‌ها دقت کنید که از D_k نمی‌توان به C_{k-1} یا E_{k-1} رفت. کوتاه‌ترین مسیر از A به D نیز طول برابر ۳ خواهد داشت و یکی از دو مسیر $ABCD$ یا $AFED$ خواهد بود. رابطه بازگشتی به فرم مقابل است: $a_n = 3a_{n-2}\ ,\ a_3 = 2 \Rightarrow a_{13} = 3^5 \times 2 = 486$

مثال ۳۸: مجموعه‌ای از ۱۰ خط در صفحه داریم که هیچ دوتای آنها موازی نیستند و هیچ سه‌تای آنها در یک نقطه مشترک نیستند. این خط‌ها صفحه را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۳)

۱) ۵۴ ۲) ۵۵ ۳) ۵۶ ۴) ۱۱۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» رابطه بازگشتی مسأله به فرم زیر است: (خط n ام، n فضا را به دو بخش تقسیم می‌کند و n ناحیه جدید ایجاد می‌کند.)

$$a_n = a_{n-1} + n\ ,\ a_1 = 2$$

$$\Rightarrow a_n = a_{n-1} + n = a_{n-2} + (n-1) + n = \cdots = a_1 + 2 + 3 + \cdots + n \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \Rightarrow a_{10} = \frac{10\times 11}{2} + 1 = 56$$

مثال ۳۹: تابع یک به یک $f:\{1,2,3,\dots,n\} \to \{1,2,3,\dots,n\}$ یک جایگشت نامیده می‌شود. در صورتی که نابرابری‌های $f(1) < f(2)$، $f(2) < f(3)$ و $f(3) < f(4)$ به ترتیب برای همه مقادیر دامنه این تابع تا $n-1$ و n برقرار باشند، چنین جایگشتی یک جایگشت صعود/ نزول نامیده می‌شود. فرض کنیم E_n تعداد جایگشت‌های صعود / نزول برای $1,2,3,\dots,n$ باشد. کدام گزینه نادرست است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۹۲)

۱) $E_3 = 2$

۲) $E_6 = 61$

۳) $E_7 = 270$

۴) در هر جایگشت صعود/ نزول برای $1,2,3,\dots,n$، عدد n در موقعیت $2i$ قرار دارد که در آن $1 \le i \le [\frac{n}{2}]$ ($[\frac{n}{2}]$ کوچک‌ترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $\frac{n}{2}$ است).

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» رابطه بازگشتی این دنباله به شکل مقابل است:

$$E_{2n} = \sum_{i=1}^{n} \binom{2n-1}{2i-1} E_{2i-1} E_{2n-2i} \quad , \quad E_{2n+1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{2n}{2i-1} E_{2i-1} E_{2n-2i+1}$$

$$E_0 = E_1 = 1$$

$$\Rightarrow E_2 = 1 \quad E_3 = 2 \quad E_4 = 5 \quad E_5 = 16 \quad E_6 = 61 \quad E_7 = 270$$

در این دنباله بزرگترین عدد همواره در یکی از مکان‌های زوج قرار دارد. تعدادی از عناصر یک دنباله مشابه در سمت چپ آن و بقیه عناصر نیز یک دنباله مشابه در سمت راست آن را تشکیل می‌دهند.

مثال ۴۰: فرض کنید a_n تعداد ماتریس‌های متقارن با درایه‌های ۰ و ۱ باشد که جمع اعداد هر ستون آن ۱ است. در این صورت a_n در کدام رابطه بازگشتی زیرصدق می‌کند؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۷)

۱) $a_n = a_{n-1} + (n-1)\times a_{n-2}$ ۲) $a_n = (n-1)\times a_{n-2}$

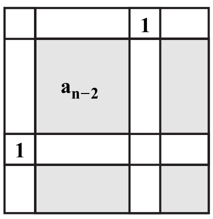
۳) $a_n = n \times a_{n-2}$ ۴) $a_n = 2a_{n-1}$

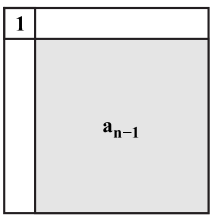
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» رابطه بازگشتی تعداد راه‌های ساخت یک ماتریس n در n متقارن که در هر ستون (و سطر) آن دقیقاً یک ۱ قرار دارد مجموع دو حالت زیر است:

حالت اول (شکل سمت چپ): مقدار عنصر بالای سمت چپ این ماتریس برابر ۱ باشد. در این صورت سایر عناصر سطر ۱ و ستون ۱ ماتریس برابر ۰ است و قسمت باقی‌مانده ماتریس، یک ماتریس $n-1$ در $n-1$ متقارن با دقیقاً یک ۱ در هر ستون (یعنی a_{n-1}) خواهد بود. تعداد این ماتریس‌ها برابر a_{n-1} است.

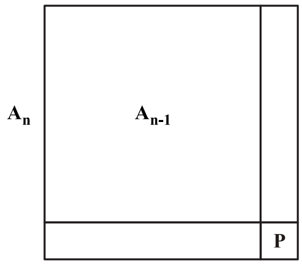
حالت دوم (شکل سمت راست): مقدار عنصر بالای سمت چپ ماتریس ۱ نباشد. مقدار عنصر $(1,i)$ و $(i,1)$ (که $i \in \{2,3,\dots,n\}$ است) در این ماتریس برابر ۱ و مقدار سایر عناصر سطر و ستون اول و i ام برابر ۰ خواهد بود. از کنارهم قرار گرفتن عناصر باقی‌مانده، یک ماتریس $n-2$ در $n-2$ متقارن با یک ۱ در هر ستون (یعنی a_{n-2}) تشکیل می‌شود. تعداد این عناصر برابر $(n-1)a_{n-2}$ است.

رابطه بازگشتی به شکل $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ خواهد بود.



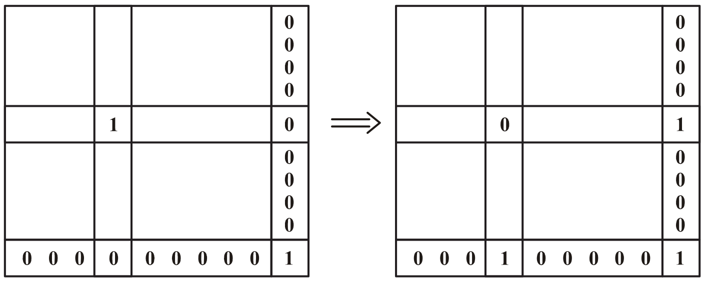


مثال۴۱: تعداد ماتریس‌های $n \times n$ از ۰ , ۱ را که در هر سطر و هر ستون آن‌ها دقیقاً ۲ بیت ۱ وجود دارد را بیابید.



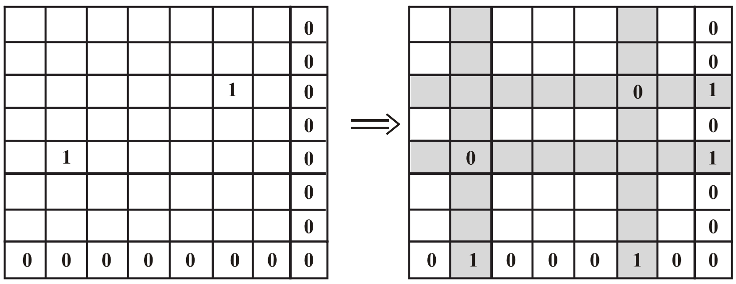
پاسخ: ماتریس‌های صورت سؤال به صورت بازگشتی از روش زیر قابل محاسبه هستند. در نظر بگیرید A_n یک نمونه ماتریس $n \times n$ از صورت سؤال باشد. مقدار خانه با اندیس (n,n) که با p مشخص شده است، دو حالت زیر را دارد:

۱ = p : در این صورت یکی دیگر از مقادیر سطر nاُم و ستون nاُم باید برابر ۱ باشد. از طرفی برای اینکه در هر سطر و ستون دقیقاً دو تا ۱ موجود باشد، باید تغییری در $A_{n-۱}$ دهیم. کافیست یکی از عناصر $A_{n-۱}$ را که مقدار ۱ دارد، به ۰ تغییر دهیم و عنصر متناظر در سطر و ستون آخر آن عنصر را به ۱ تغییر دهیم. بقیه عناصر سطر و ستون آخر برابر ۰ خواهند شد. در واقع اگر عنصر $(i\ ,\ j)$ را برابر ۰ قرار دهیم، عنصر $(i\ ,\ n)$ و $(n\ ,\ j)$ را به ۱ تغییر می‌دهیم:



تعداد ماتریس‌هایی که عنصر واقع در سطر و ستون nاُم آن‌ها برابر ۱ است، برابر $\binom{۲n-۲}{۱} A_{n-۱}$ می‌باشد که $\binom{۲n-۲}{۱}$ تعداد ۱های ماتریس $A_{n-۱}$ است.

۰ = p : در این حالت باید دو عنصر از سطر nاُم و دو عنصر از ستون nاُم را برابر ۱ قرار دهیم. برای این کار کافیست دو عنصر که نه در یک سطر و نه در یک ستون قرار دارند با مقدار ۱ از $A_{n-۱}$ را برابر ۰ قرار دهیم و عناصر متناظر با آن‌ها در سطر و ستون nاُم را برابر ۱ قرار دهیم. در واقع اگر $(i_۱, j_۱)$ و $(i_۲, j_۲)$ را از ۱ به ۰ تغییر دهیم $(i_۱,n)$، $(i_۲,n)$، $(n,j_۱)$ و $(n,j_۲)$ را از ۰ به ۱ تغییر خواهیم داد.



تعداد ماتریس‌های صورت سؤال که عنصر موجود در خانه با اندیس (n,n) آن‌ها برابر ۰است، برابر است با $\left(\binom{۲n-۲}{۲} - ۲(n-۱)\right) A_{n-۱}$ که $\binom{۲n-۲}{۲} - ۲(n-۱)$ تعداد حالات انتخاب ۲ عدد ۱ در ماتریس $A_{n-۱}$ می‌باشد که نه در یک سطر و نه در یک ستون واقع هستند. از جمع این دو مقدار خواهیم داشت:

$$A_n = \binom{۲n-۲}{۱} A_{n-۱} + \left(\binom{۲n-۲}{۲} - ۲(n-۱)\right) A_{n-۱} = \binom{۲n-۲}{۲} A_{n-۱}$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{(۲n-۲)(۲n-۳)}{۲} A_{n-۱} = \frac{(۲n-۲)(۲n-۳)(۲n-۴)(۲n-۵)}{۲^۲} A_{n-۲} = \ldots = \frac{(۲n-۲)!}{۲^{n-۱}}$$

$$A_۲ = ۱$$

رابطه بازگشتی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت

فرم کلی یک رابطه بازگشتی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت با فرض $c_{n-۲} \neq ۰$ به‌صورت مقابل است:

$$a_n + c_{n-۱} a_{n-۱} + c_{n-۲} a_{n-۲} = ۰$$

در بخش قبل جوابی به صورت $a_n = cr^n$ به دست آوردیم که c و r مخالف صفر بودند. در این مرحله نیز دنبال جوابی به فرم $a_n = cr^n$ هستیم.

با قرار دادن این جواب در معادله به ازای $c, r \neq ۰$ خواهیم داشت:

$$cr^n + c_{n-۱} cr^{n-۱} + c_{n-۲} cr^{n-۲} = ۰$$

معادله مشخصه رابطه فوق به شکل $r^۲ + c_{n-۱} r + c_{n-۲} = ۰$ خواهد بود. حال به دنبال مقادیری از r هستیم که به ازای آن‌ها مقدار عبارت برابر ۰ گردد.

ریشه‌های r_1 و r_2 (ریشه‌های معادله مشخصه این معادله) می‌توانند به یکی از سه حالت زیر باشند:

الف ـ r_1 و r_2 اعداد حقیقی متمایز باشند. ب ـ r_1 و r_2 اعداد مختلط مزدوج باشند. ج ـ r_1 و r_2 اعداد حقیقی برابر باشند.

یادآوری: ریشه‌های معادله $ar^2+br+c=0$ برابر $r_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $r_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ خواهند بود.

توجه کنید که اگر عبارت زیر رادیکال مثبت باشد حالت الف، اگر منفی باشد حالت ب و اگر صفر شود حالت ج اتفاق خواهد افتاد.

حالت الف. ریشه‌های حقیقی متمایز

ساده‌ترین حالت برای محاسبه فرم صریح رابطه بازگشتی مرتبه دوم، معادله‌ای است که ریشه‌های معادله مشخصه، حقیقی و متمایز باشند. رابطه بازگشتی $a_n+a_{n-1}-6a_{n-2}=0$ را که در آن $a_0=1$ و $a_1=2$ بررسی می‌کنیم. اگر $a_n=cr^n$ معادله مشخصه به صورت $cr^n+cr^{n-1}-6cr^{n-2}=0$ به دست می‌آید. با ساده کردن این معادله، معادله مشخصه $r^2+r-6=0$ به دست می‌آید که دارای دو ریشه مشخصه ۲ و ۳- می‌باشد.

از آنجایی که دو ریشه حقیقی و متمایزند، بنابراین $a_n=2^n$ و $a_n=(-3)^n$ هر دو جواب هستند. اینها جواب‌های خطی مستقل هستند؛ زیرا مضربی از یکدیگر نمی‌باشند. بنابراین رابطه $a_n=c_1(2)^n+c_2(-3)^n$ معرف جواب کلی معادله می‌باشد که c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه می‌باشند. با توجه به شرایط مرزی بیان شده، c_1 و c_2 را به صورت روبه‌رو می‌یابیم: $2=a_1=c_1(2)^1+c_2(-3)^1=2c_1-3c_2$ $\quad 1=a_0=c_1(2)^0+c_2(-3)^0=c_1+c_2$

با حل این دستگاه معادلات داریم $c_1=1, c_2=0$؛ بنابراین $a_n=2^n$ جواب یکتای رابطه بازگشتی بیان شده می‌باشد.

نکته ۳: اگر معادله مشخصه یک رابطه بازگشتی مرتبه k دارای k ریشه متمایز r_1، r_2، ... و r_k باشد، آنگاه جواب رابطه بازگشتی به صورت مقابل خواهد بود: $a_n=c_1r_1^n+c_2r_2^n+\dots+c_kr_k^n$

در این معادله مجهولات c_1، c_2، ... و c_k را می‌توان از شرایط اولیه گفته شده به دست آورد.

پس در حالت کلی اگر r_1 و r_2 دو ریشه حقیقی متمایز باشند، جواب عمومی (کلی) رابطه به صورت $a_n=c_1r_1^n+c_2r_2^n$ می‌باشد و با در نظر گرفتن شرایط اولیه ثابت‌های c_1 و c_2 را مطابق مثال فوق به دست می‌آوریم.

حالت ب. ریشه‌های مختلط

حالت دیگر محاسبه فرم صریح یک معادله همگن مرتبه دوم، مربوط به حالتی است که ریشه‌های معادله مشخصه، اعداد مختلط باشند. برای ساده‌سازی فرم صریح رابطه بازگشتی در این حالت نیازمند به استفاده از قضیه **دموآور** هستیم. با توجه به این قضیه به ازای اعداد طبیعی n خواهیم داشت:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

هر عدد مختلط به فرم $z=x+iy$ را می‌توان به‌صورت $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ نوشت که در آن $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ خواهد بود. حال با استفاده از قضیه دموآور می‌توان توان اعداد مختلط را به شکل ضریب زاویه‌ای توابع مثلثی تبدیل نمود.

به عنوان مثال، رابطه بازگشتی $a_n=2a_{n-1}-2a_{n-2}$ را در نظر بگیرید که در آن $n\ge 2$ و $a_0=1$ و $a_1=2$. با قرار دادن $a_n=cr^n$ معادله مشخصه این معادله به صورت ساده شده $r^2-2r+2=0$ بدست می‌آید که ریشه‌های آن $1\pm i$ هستند؛ بنابراین جواب عمومی این رابطه بازگشتی به‌صورت $c_1(1+i)^n+c_2(1-i)^n$ خواهد بود و داریم: $1-i=\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})-i\sin(\frac{\pi}{4}))\quad,\quad 1+i=\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))$

با قرار دادن این مقادیر در معادله جواب و استفاده از قضیه دموآور داریم:

$$a_n=c_1(1+i)^n+c_2(1-i)^n=c_1(\sqrt{2})^n(\cos(\frac{n\pi}{4})+i\sin(\frac{n\pi}{4}))+c_2(\sqrt{2})^n(\cos(\frac{n\pi}{4})-i\sin(\frac{n\pi}{4}))$$

$$=(\sqrt{2})^n[k_1\cos(\frac{n\pi}{4})+k_2\sin(\frac{n\pi}{4})]$$

$k_1=c_1+c_2$ و $k_2=(c_1-c_2)i$، پس داریم:

$$1=a_0=[k_1\cos 0+k_2\sin 0]=k_1\Rightarrow k_1=1$$

$$2=a_1=\sqrt{2}[1.\cos(\frac{\pi}{4})+k_2\sin(\frac{\pi}{4})]=1+k_2\Rightarrow 2=1+k_2\Rightarrow k_2=1$$

بنابراین جواب با توجه به مفروضات داده شده به صورت روبه‌رو خواهد بود: $a_n=(\sqrt{2})^n[\cos(\frac{n\pi}{4})+\sin(\frac{n\pi}{4})]\ ,\ n\ge 0$

توجه کنید که ضرایب c_1 و c_2 می‌توانند مختلط باشند. در این صورت همواره می‌توان دو عدد مختلط c_1 و c_2 پیدا کرد که $k_1=c_1+c_2$ و $k_2=i(c_1-c_2)$ اعداد صحیح باشند. کافیست $c_1=\dfrac{k_1}{2}+i\dfrac{k_2}{2}$ و $c_2=\dfrac{k_1}{2}-i\dfrac{k_2}{2}$ قرار دهیم.

حالت ج. ریشه‌های حقیقی تکراری

در حالتی که ریشه‌های حقیقی یکسان باشند، باید سعی شود که جواب مستقل دیگری ساخته شود. به عنوان مثال، رابطه بازگشتی $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$ به ازای $n\geq 0$ و $a_0=1$ و $a_1=3$ را در نظر می‌گیریم. مانند دو حالت قبل $a_n=cr^n$ قرار می‌دهیم که در آن c و r مخالف صفر است و $n\geq 0$. با ساده‌سازی معادله، معادله مشخصه به‌صورت $r^2-4r+4=0$ خواهد بود؛ بنابراین هر دو ریشه معادله مشخصه برابر $r=2$ هستند (به $r=2$ ریشه تکراری گفته می‌شود). متأسفانه دیگر دو جواب مستقل نیستند؛ زیرا 2^n و 2^n قطعاً مضربی از یکدیگر می‌باشند؛ بنابراین به جواب مستقل دیگری نیاز داریم. در این شرایط $n(2^n)$، جواب دیگر خواهد بود (این ملاک در نکته بعدی بیان شده است). با قرار دادن $a_n=n(2^n)$ در رابطه مفروض خواهیم داشت:

$$4a_{n+1}-4a_n=4[(n+1)2^{n+1}-4n2^n=2(n+1)2^{n+2}-n_2^{n+2}]=[2n+2-n]2^{n+2}=(n+2)2^{n+2}=a_{n+2}$$

بنابراین $n(2)^n$ دومین جواب مستقل می‌باشد. واضح است که این دو جواب مستقل می‌باشند؛ بنابراین جواب عمومی به صورت زیر خواهد بود:

$$a_n=c_1(2^n)+c_2n(2^n)$$

نکته ۴: به طور کلی اگر رابطه $a_n+c_{n-1}a_{n-1}+\ldots+c_{n-k}a_{n-k}=0$ با ثابت‌های حقیقی $c_{n-1},\ldots,c_{n-k}$ $(c_{n-k}\neq 0)$ و ریشه مشخصه r با m تکرار که در آن $2\leq m\leq k$ برقرار باشند، آن قسمت از جواب عمومی که متضمن ریشه r است دارای صورت زیر می‌باشد:

$$A_0r^n+A_1nr^n+A_2n^2r^n+\ldots+A_{m-1}n^{m-1}r^n=(A_0+A_1n+\ldots+A_{m-1}n^{m-1})\times r^n$$

$A_0,A_1,A_2,\ldots,A_{m-1}$ ضرایب ثابت می‌باشد.

یادآوری: ریشه‌های یک معادله مقادیری هستند که مقدار معادله به ازای آن مقادیر برابر ۰ می‌شود. در صورتی که معادله از درجه ۱ باشد ریشه معادله با یک تقسیم ساده قابل محاسبه است. برای معادلات درجه ۲ از رابطه دلتا استفاده می‌کنیم و برای معادلاتی که از درجه بالاتر از ۲ هستند، بهترین روش حل، حدس زدن چند ریشه است تا معادله به فرم درجه ۲ برسد. در چنین حالاتی بهتر است ریشه‌های $\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ به ترتیب بررسی شوند و پس از اطمینان از وجود ریشه r، معادله از درجه k به صورت f_1 را به معادله از درجه $k-1$ به صورت f_2 بازنویسی نماییم: $f_1(x)=(x-r)f_2(x)$

به عنوان مثال برای رابطه $f_1(x)=x^5+4x^4-8x^3-30x^2-9x+14$ با قرار دادن مقدار $x=1$ برابر $f_1(1)=0$ می‌شود که خواهیم داشت:

$$f_1(x)=(x-1)f_2(x)=(x-1)(x^4+7x^3+11x^2-5x-14)$$

معادله $f_2(x)$ نیز با قرار دادن مقدار $x=1$ برابر $f_2(1)=0$ می‌شود. ریشه بعدی این معادله برابر $x=-2$ خواهد بود در نتیجه رابطه را می‌توان به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$f_1(x)=(x-1)^2(x+2)(x^2+6x+7)$$

ریشه‌های معادله x^2+6x+7 با استفاده از دلتا قابل محاسبه است.

مثال ۴۲: فرم کلی رابطه بازگشتی مقابل در کدام گزینه آمده است؟ $\mathbf{a_n=4a_{n-1}-3a_{n-2}}$

۱) $a_n=c_1(3)^n+c_2$
۲) $a_n=c_1(2)^n+c_2n2^n$
۳) $a_n=c_1(-3)^n+c_2(-1)^n$
۴) $a_n=c_1(-3)^n+c_2$

پاسخ: گزینه «۱» معادله مشخصه رابطه بازگشتی فوق به صورت $r^2=4r-3$ است. این معادله به فرم $(r-3)(r-1)=0$ قابل بازنویسی است. در نتیجه ریشه‌های معادله مشخصه برابر $r_1=3$ و $r_2=1$ است. فرم کلی معادله صریح رابطه بازگشتی به صورت مقابل خواهد بود: $a_n=c_1(3)^n+c_2(1)^n$

مثال ۴۳: دنباله‌ی $\{b_n\}_{n\geq 0}$ با شرایط اولیه‌ی $b_1=1$ و $b_0=0$ و رابطه‌ی بازگشتی $b_n=2(b_{n-1}+b_{n-2})$ که به ازای $n\geq 2$ برقرار است، مشخص شده است. مقدار b_{1000} برابر کدام گزینه است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) $\frac{1}{2\sqrt{5}}[(1+\sqrt{5})^{1000}-(1-\sqrt{5})^{1000}]$
۲) $\frac{1}{2\sqrt{3}}[(1+\sqrt{3})^{1000}-(1-\sqrt{3})^{1000}]$
۳) $\frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^{1000}-(2-\sqrt{3})^{1000}]$
۴) $\frac{1}{2\sqrt{5}}[(2+\sqrt{5})^{1000}-(2-\sqrt{5})^{1000}]$

پاسخ: گزینه «۲» معادله مشخصهٔ این رابطهٔ بازگشتی به فرم مقابل می‌باشد: $x^2-2x-2=0$

ریشه‌های این معادله برابر است با $1+\sqrt{3}$ و $1-\sqrt{3}$؛ بنابراین تنها گزینه‌ی (۲) می‌تواند صحیح باشد.

مثال۸۱: یک رابطه خوش‌بنیان روی مجموعه A رابطه دوتایی $\prec$ روی A با این خاصیت است که هیچ دنباله نامتناهی نزولی $a_۰ \succ a_۱ \succ a_۲ \succ \cdots$ در A وجود نداشته باشد. کدام مورد درست نیست؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۹۱)

۱) اگر $\prec$ رابطه‌ای خوش‌بنیان روی A باشد، آنگاه $a \prec a$ برای هیچ $a \in A$ برقرار نیست.

۲) رابطه $\prec$ روی A خوش‌بنیان است، اگر و فقط اگر هر زیرمجموعه ناتهی B از A عنصر مینیمال داشته باشد.

۳) رابطه $\prec$ با تعریف مقابل روی مجموعه اعداد طبیعی خوش‌بنیان است: $n \prec m \Leftrightarrow m = n + ۱$

۴) رابطه $\prec$ با تعریف مقابل روی مجموعه زوج‌های طبیعی خوش‌بنیان نیست: $(n,m) \prec (n',m') \Leftrightarrow (n < n') \vee (n = n' \wedge m < m')$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به رابطه داده شده نمی‌توان هیچ دنباله نزولی نامتناهی برای آن در نظر گرفت؛ زیرا با شروع از هر زوج مرتب با تعداد متناهی زوج مرتب دیگر به (۱,۱) خواهیم رسید.

مثال۸۲: کدام مورد درست نیست؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۹۱)

۱) در حالی که گزاره «اگر (A,R) مجموعه تماماً مرتب باشد، آنگاه مشبکه است.» درست است، عکس این موضوع درست نیست.

۲) مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x^۳ < ۳\}$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{Q}$ کران بالا دارد ولی $\sup(A)$ وجود ندارد.

۳) فرض کنیم $(A, \subseteq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب و $B = \{A_i\}_{i\in I}$ زیرمجموعه‌ای از A باشد. اگر $B \in A$ یک کران بالای B باشد، آنگاه $U_{i\in I}A_i$ هم زیرمجموعه B و هم‌کران بالای B است.

۴) فرض کنیم $\mathbb{N}$، اعداد طبیعی، با « x و y را می‌شمارد.» مرتب شده است و فرض کنیم $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_m\}$ زیرمجموعه‌ای متناهی از $\mathbb{N}$ باشد. در این صورت، $\sup(A)$ وجود دارد.

☑ **پاسخ:** هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیست. در واقع همه عبارت‌ها صحیح هستند و عبارت نادرستی وجود ندارد.

مثال۸۳: ترتیب جزئی $(S_۱ \leq)$ که در آن هر دو عنصر S قابل مقایسه باشند، «ترتیب کامل» می‌نامیم. همچنین ترتیب جزئی $(S_۲ \leq)$ را که هر زیرمجموعه از آن دارای کوچک‌ترین عضو است، «خوش ترتیب» می‌نامیم. چند تا از گزاره‌های زیر درستاند؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۹۶)

ـ هر ترتیب کامل یک مشبکه است. ـ هر مشبکه یک ترتیب کامل است. ـ هر ترتیب کامل خوش‌ترتیب است.

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» عبارت اول صحیح است؛ زیرا هر زیرمجموعه از ترتیب کامل دارای بزرگترین و کوچکترین عضو است. عبارت دوم نادرست است. جبربول با اندازه بزرگترمساوی ۲ مثال نقضی برای این عبارت است. عبارت سوم نیز نادرست است. زیرا رابطه کوچکترمساوی روی مجموعه اعداد صحیح، ترتیب کامل است ولی خوش‌ترتیب نیست.

مرتب‌سازی و توپولوژیک

اگر $(A, \preccurlyeq_۱)$ و $(A, \preccurlyeq_۲)$ دو مجموعه جزئی مرتب باشند، آنگاه یک رابطه جزئی مرتب به صورت زیر بر روی $A \times B$ قابل تعریف است:

$$\preccurlyeq (a,b) \preccurlyeq (c,d) \Leftrightarrow a \,{}_۱ c \text{ و } b \preccurlyeq_۲ d$$

به این معنی که زوج (a,b) کوچکتر از (c,d) است، هرگاه a با رابطه تعریف شده روی مجموعه A از c کوچکتر باشد و b با رابطه تعریف شده روی B کوچکتر از d باشد. در این حالت به رابطه $\preccurlyeq$ بر روی $A \times B$، یک **ترتیب لغت‌نامه‌ای** (lexicographic order) گفته می‌شود.

به عنوان مثال، اگر $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ و $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ را در نظر بگیریم، در رابطه جزئی مرتب $(\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+, \leq)$، می‌توانیم بنویسیم: $۳ \leq ۴, ۶ \leq ۹ \ : \ (۳,۶) \leq (۴,۹)$

در حالت کلی می‌توان شکل زیر را برای نشان دادن این ترتیب در $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ در نظر گرفت:

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
(۱,۷)	(۲,۷)	(۳,۷)	(۴,۷)	(۵,۷)	(۶,۷)	(۷,۷) …
(۱,۶)	(۲,۶)	(۳,۶)	(۴,۶)	(۵,۶)	(۶,۶)	(۷,۶) …
(۱,۵)	(۲,۵)	(۳,۵)	(۴,۵)	(۵,۵)	(۶,۵)	(۷,۵) …
(۱,۴)	(۲,۴)	(۳,۴)	(۴,۴)	(۵,۴)	(۶,۴)	(۷,۴) …
(۱,۳)	(۲,۳)	(۳,۳)	(۴,۳)	(۵,۳)	(۶,۳)	(۷,۳) …
(۱,۲)	(۲,۲)	(۳,۲)	(۴,۲)	(۵,۲)	(۶,۲)	(۷,۲) …
(۱,۱)	(۲,۱)	(۳,۱)	(۴,۱)	(۵,۱)	(۶,۱)	(۷,۱) …

ترتیب لغت‌نامه‌ای را می‌توان به حاصل‌ضرب دکارتی تعداد دلخواهی مجموعه تعمیم داد. فرض کنید مجموعه‌های جزئی مرتب زیر داده شده باشند:

$(A_1 \preccurlyeq_1)$ و $(A_2 \preccurlyeq_2)$ و $(A_3 \preccurlyeq_3)$ و ... و $(A_n \preccurlyeq_n)$

در این حالت مجموعه جزئی مرتب $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n, \preccurlyeq)$ قابل تعریف است که رابطه $\preccurlyeq$ به صورت زیر می‌باشد:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \preccurlyeq (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) \Leftrightarrow a_i \preccurlyeq_i a'_i$$

فرض کنید مجموعه‌ای از کارها مانند $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ وجود داشته باشند که برخی از کارها به کارهای دیگر وابستگی دارند و باید تعدادی از کارها قبل از آن انجام شود. به عنوان مثال، برای انتخاب درس ساختمان گسسته باید دروس ریاضیات عمومی گذرانده شده باشد. در این صورت اگر رابطه $\preccurlyeq$ را بر روی مجموعه J به صورت زیر تعریف نماییم:

$j_a \preccurlyeq j_b \Leftrightarrow$ کار j_b برای انجام شدن به کار j_a وابستگی دارد

(کار j_a باید زودتر از کار j_b انجام شود.)

در این صورت رابطه $\preccurlyeq$ یک رابطه جزئی مرتب را نشان می‌دهد. در بسیاری موارد کاربردی، هدف تعیین ترتیبی از کارها می‌باشد که رابطه وابستگی در آنها رعایت شده باشد. به این ترتیب، **ترتیب توپولوژیک** گفته می‌شود و عمل تولید ترتیب موردنظر مرتب‌سازی توپولوژیک نامیده می‌شود؛ بنابراین یک ترتیب توپولوژیک بر روی یک مجموعه جزئی مرتب، دنباله‌ای به صورت روبه‌رو است: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

که در آن $\forall i \in \{2, 3, \ldots, n\} \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, i-1\} \; a_i \not\preccurlyeq a_j$، یعنی هیچ عضوی قبل از اعضایی که قبل از آن هستند، ظاهر نشود.

به عنوان مثال، اگر مجموعه $(\{1,2,4,5,12,20\}, |)$ را در نظر بگیریم، آنگاه ترتیب زیر، مرتب‌سازی توپولوژیک را نشان می‌دهد:

$1 \prec 5 \prec 2 \prec 4 \prec 20 \prec 12$

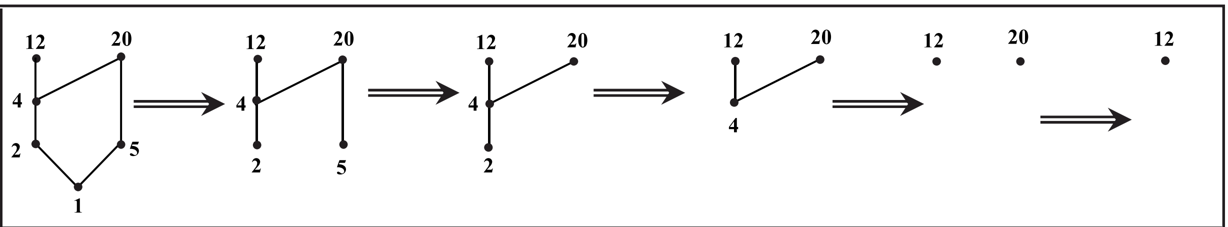
با توجه به این که در یک مجموعه جزئی مرتب هیچ عنصری کوچکتر از عضو مینیمال وجود ندارد، می‌توان برای تولید یک ترتیب توپولوژیک در هر مرحله یک عضو مینیمال را حذف نمود و آن را به عنوان یک عنصر جدید در ترتیب توپولوژیک قرار داد و همین عمل را تکرار نمود تا این که تمام عناصر مجموعه در ترتیب قرار گیرند؛ اما آیا هر مجموعه دارای عضو مینیمال می‌باشد؟

نکته۲۸: هر مجموعه جزئی مرتب متناهی دارای حداقل یک عضو مینیمال است.

با توجه به نکته بیان شده می‌توان الگوریتم زیر را برای مرتب‌سازی توپولوژیک در نظر گرفت:

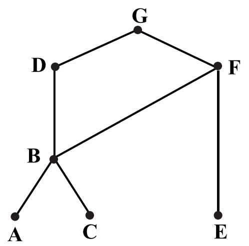
```
topological sort ((S, ≼): finite poset)
k := 1
while S ≠ ∅
begin
a_k := a minimal element of S
S := S − {a_k}
k := k + 1
end
```

به عنوان مثال، اگر مجموعه مرتب $(\{1,2,4,5,12,20\}, |)$ را در نظر بگیریم، آنگاه مراحل اجرای الگوریتم بیان شده به صورت زیر می‌باشد:

مجموعه باقیمانده						
عضو مینیمال انتخاب شده	1	5	2	4	20	12

در گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب عناصر F، B و G زود ظاهر شدند.

مثال۸۴: یک پروژه کاری به هفت ماژول $A, B, \ldots, G$ تقسیم شده است. رابطه $\preccurlyeq$ طوری تعریف شده که به عنوان مثال، $A \preccurlyeq B$ نشان‌دهنده نیاز ماژول B به خروجی ماژول A می‌باشد. اگر نمودار هاسه زیر از روابط موجود بین ماژول‌های کاری به دست آمده باشد، آنگاه کدام گزینه نشان‌دهنده یک ترتیب ممکن برای انجام ماژول‌ها می‌باشد؟ (از چپ به راست)



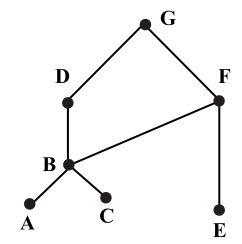
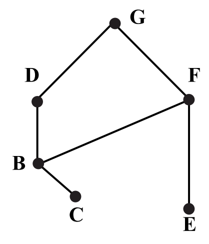
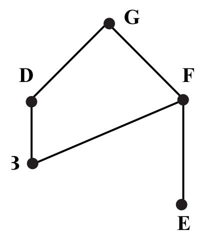
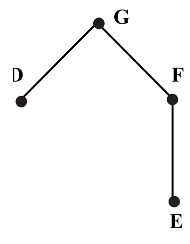
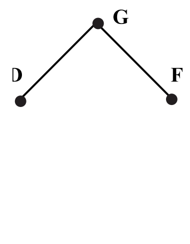
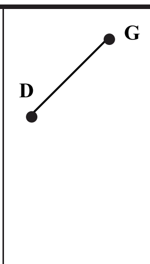
۱) A, C, E, F, B, D, G

۲) A, B, C, F, D, G, E

۳) A, E, C, B, D, G, F

۴) A, C, B, E, F, D, G

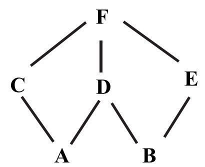
☑ **پاسخ:** گزینه «۴» در زیر مراحل اجرای الگوریتم مرتب‌سازی توپولوژیک آمده است:

مجموعه باقیمانده							
عضو مینیمال انتخاب شده	A	C	B	E	F	D	G

در گزینه‌های ۱ ، ۲ و ۳ به ترتیب عناصر F، B و G زود ظاهر شدند.

مثال ۸۵: نمودار هاس یک ترتیب جزئی به شکل زیر است. این ترتیب جزئی چند ترتیب توپولوژیک متفاوت دارد؟

(مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۹۴)



۱) ۶
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» ترتیب‌های توپولوژیک قابل قبول به صورت زیر هستند (مقادیر داخل پرانتز را می‌توان جایگشت داد). در مجموع، ۱۶ حالت داریم.

$BEA(CD)F:۲!$ $\quad$ $ACB(DE)F:۲!$ $\quad$ $(AB)(CDE)F:۲!\times ۳!=۱۲$

رابطه سازگاری

رابطه R را روی مجموعهٔ A رابطه سازگاری می‌گوییم، هرگاه انعکاسی و تقارنی باشد.

نکته۲۹: تعداد روابط سازگاری روی یک مجموعه متناهی با n عضو برابر با $۲^{\frac{n^۲-n}{۲}}$ می‌باشد.

توجه: هر رابطه‌ی هم‌ارزی یک رابطه سازگاری است؛ اما عکس آن درست نمی‌باشد.

اگر R یک رابطه سازگاری باشد و xRy، در این صورت x و y را سازگار می‌گوییم.

تذکر۶: روابط سازگاری را با $\approx$ نمایش می‌دهیم.

بلاک سازگار ماکسیمال

اگر A یک مجموعه و R یک رابطه سازگاری روی آن باشد، زیرمجموعه‌ی B از A را بلاک سازگار ماکسیمال می‌گوییم، هرگاه هر عضو B با عضو دیگر B سازگار باشد و هیچ عضوی از A − B با همه‌ی عناصر B سازگار نباشد.

بلاک‌های سازگار ماکسیمال پوشش‌هایی برای مجموعه می‌باشند.

درسنامه (۳): توابع

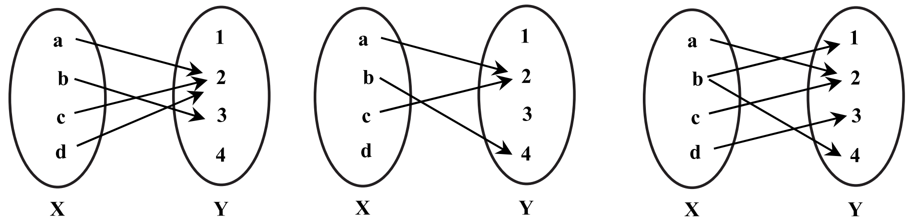
تابع (Function)

❖ **تعریف تابع:** اگر X و Y دو مجموعه غیرتهی باشند، آنگاه یک تابع مانند f از X به Y رابطه‌ای است از X به Y که به هر عضو دلخواه $x \in X$ یک عنصر منحصر به فرد مانند $y \in Y$ را نظیر کند.

مجموعه X دامنه و مجموعه عناصر متناظر با اعضای X که یک زیرمجموعه از Y می‌باشد، برد تابع f نامیده می‌شود. تابع f به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$f: X \to Y$$

به عنوان مثال، سه رابطه زیر را در نظر بگیرید:



(الف)   (ب)   (ج)

در شکل (الف)، رابطه داده شده یک تابع را مشخص می‌نماید؛ زیرا به هر عضو مجموعه X تنها یک عنصر از مجموعه Y را نظیر کرده است. اما شکل‌های (ب) و (ج) تابع نمی‌باشند؛ زیرا در شکل (ب) عنصر d از مجموعه X به هیچ عضوی از Y نگاشت نشده است. همچنین در شکل (ج) عضو b از مجموعه X به دو عضو از مجموعه Y نگاشت شده است و بنابراین تابع نمی‌باشد.

دامنه و برد تابع f در شکل (الف) را می‌توان به صورت مقابل در نظر گرفت: $D(f) = \{a,b,c,d\}$, $R(f) = \{۲,۳\}$

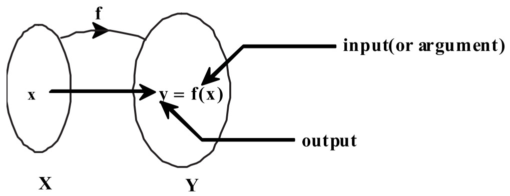
فرض کنید دو مجموعه X و Y به ترتیب با m و n عنصر داده شده باشند. در این صورت می‌توان هر تابع دلخواه مانند f از X به Y را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$X = \{x_۱, x_۲, \cdots x_m\} \quad , \quad Y = \{y_۱, y_۲, \cdots, y_n\}$$
$$f = \{(x_۱, y'_۱), (x_۲, y'_۲), \cdots\cdots (x_m, y'_m)\}$$

هر عنصر y'_i می‌تواند هر یک از اعضای مجموعه Y باشد؛ بنابراین تعداد کل حالات ممکن برای ایجاد یک تابع برابر با n^m یا $|y|^{|X|}$ می‌باشد. در نتیجه می‌توان نکته زیر را بیان نمود.

نکته۳۰: تعداد توابع ممکن از مجموعه X به Y برابر $|Y|^{|X|}$ و تعداد توابع ممکن از Y به X برابر $|X|^{|Y|}$ می‌باشد.

اگر تابعی مانند f، عنصر $x \in X$ را به عنصر $y \in Y$ نظیر کند، آنگاه به y، تصویر (image) x تحت تابع f می‌گوییم و این تناظر را به صورت $y = f(x)$ نشان می‌دهیم. همچنین به x ورودی (input) یا آرگومان (argument) و به Y خروجی (output) تابع نیز گفته می‌شود.



❖ **تعریف تابع مساوی:** دو تابع $f: X \to Y$ و $g: X \to Y$ را مساوی می‌گوییم و به صورت $f = g$ نشان می‌دهیم، اگر به ازای تمام عناصر $x \in X$ داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

برای مثال توابع f و g که به صورت زیر تعریف شده‌اند، با یکدیگر برابرند؛ اما h و k با یکدیگر برابر نمی‌باشند:

$$f = \{(a,۱), (b,۲), (c,۳), (e,۱)\} \qquad g = \{(b,۲), (e,۱), (c,۳), (a,۱)\}$$

$$h = \{(x_۱,۱), (x_۲,۴), (x_۳,۳), (x_۴,۲)\} \qquad k = \{(x_۱,۱), (x_۲,۴), (x_۴,۲), (x_۳,۴)\}$$

در تابع k داریم $k(x_۳) = ۴$، اما در تابع h داریم $h(x_۳) = ۳$، بنابراین توابع h و k با یکدیگر برابر نمی‌باشند.

❖ **تعریف جمع و ضرب توابع:** اگر $f_۱ : X_۱ \to Y$ و $f_۲ : X_۲ \to Y$ دو تابع باشند، آنگاه **جمع** و **ضرب** این دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شود که هر یک تابعی از X به Y است.

$$(f_۱ + f_۲)(x) = f_۱(x) + f_۲(x) \quad , \quad (f_۱ f_۲)(x) = f_۱(x) f_۲(x)$$

اگر دو تابع $f_۱$ و $f_۲$ به صورت زیر تعریف شده باشند (تناظر بین ورودی و خروجی توابع با ضابطه‌های بیان شده مشخص شده است.

$$f_۱ = \mathbb{R}, \quad f_۱(x) = x^۲ \qquad f_۲ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_۲(x) = x - x^۲$$

جمع و ضرب این دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)=x^2+(x-x^2)=x \qquad , \qquad (f_1f_2)(x)=x^2(x-x^2)=x^3-x^4$$

❖ **تعریف تابع یک‌به‌یک:** یک تابع مانند $f:X\to Y$ یک به یک (injective یا one − to − one) نامیده می‌شود، اگر هیچ‌گاه یک عضو از برد را به دو عضو متفاوت از دامنه متناظر نکند. به عبارت دیگر، دو عضو متمایز دامنه دارای تصویرهای متمایز باشند. در واقع می‌توان گفت، در هر تابع یک به یک از تساوی $f(a)=f(b)$، می‌توان نتیجه گرفت $a=b$ می‌باشد.

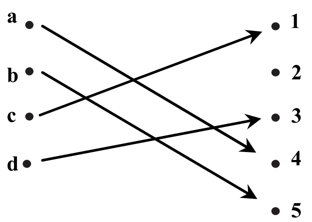
نکته۳۱: شرط لازم برای یک به یک بودن تابع این است که اندازه مجموعه دامنه از اندازه مجموعه برد بزرگ‌تر نباشد.

مثال۸۶: اگر دو تابع f و g را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\mathbf{f=\{(a,4),(b,5),(c,1),(d,3)\}} \qquad \mathbf{g(x)=x^2,} \quad \mathbf{g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$$

در این صورت تابع f یک به یک می‌باشد اما g یک به یک نیست؛ زیرا به عنوان مثال: $\mathbf{g(2)=g(-2)=4}$

یک به یک بودن f را می‌توان در شکل زیر نیز مشاهده نمود:



مثال۸۷: فرض کنید $A=\{0,1,2\}$ **و** $B=\{1,2,3,\dots,6,7\}$ **باشد. تعداد توابعی از A به B که در شرط زیر صدق می‌کنند، کدام است؟** (ریاضی ـ سراسری ۹۳)

برای هر i و j: $i<j \Rightarrow f(i)<f(j)$

۱) ۳۳ ۲) ۳۵ ۳) ۳۸ ۴) ۴۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» کافیست ۳ عضو از مجموعه $\{1,2,\dots,7\}$ انتخاب کنیم و عضو بیشینه را به ۲ و عضو وسطی را به ۱ و عضو کمینه را به ۰ نسبت دهیم.

$$\text{جواب}=\binom{7}{3}=35$$

مثال۸۸: با توجه به دو گزاره زیر، کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۹۶)

الف) مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های مربعی که درایه‌های آن اعداد صحیح‌اند شمارا است.

ب) کاردینالیتی مجموعه‌ی توابع $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ **بیش‌تر از توابع** $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ **است.**

۱) (الف) درست، (ب) درست ۲) (الف) نادرست، (ب) درست ۳) (الف) درست، (ب) نادرست ۴) (الف) نادرست، (ب) نادرست

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» عبارت اول صحیح است. زیرا در حالت کلی، اجتماع شمارایی از مجموعه‌های شمارا، مجموعه‌ای شمارا خواهد بود. همچنین حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌های شمارا، شمارا خواهد بود و مجموعه ماتریس‌ها را می‌توان به اندازه مجموعه چهار مرتبه حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه اعداد صحیح دانست. منظور از کاردینالیتی یک مجموعه، اندازه آن مجموعه است.

با توجه به اینکه تعداد توابع از مجموعه m عضوی به مجموعه n عضوی برابر $m\times n$ است و اندازه مجموعه اعداد حقیقی از اعداد طبیعی بزرگ‌تر است، کاردینالیتی مجموعه توابع اعداد طبیعی به اعداد حقیقی از مجموعه توابع اعداد طبیعی به اعداد طبیعی بزرگ‌تر خواهد بود. زیرا کاردینالیتی مجموعه اعداد طبیعی برابر N_0 و کاردینالیتی اعداد حقیقی برابر 2^{N_0} است. در حقیقت در نظریه مجموعه کاردینالیتی اعداد حقیقی برابر مجموعه توانی اعداد طبیعی درنظر گرفته می‌شوند.

نکته۳۲: تعداد توابع یک به یک از X به Y برابر با $\dfrac{|Y|!}{(|Y|-|X|)!}=\binom{|Y|}{|X|}\times|X|!$ می‌باشد.

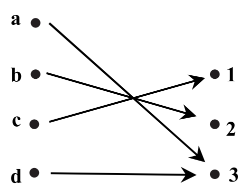
❖ **تعریف تابع صعودی و نزولی:** یک تابع مانند $f:X\to Y$ که $X,Y\subseteq\mathbb{R}$، یک تابع **صعودی** (increasing) نامیده می‌شود، اگر به ازای هر $x_1<x_2$ داشته باشیم $f(x_1)\le f(x_2)$ و **صعودی** اکید نامیده می‌شود، هرگاه $f(x_1)<f(x_2)$ باشد و اگر به ازای هر $x_1<x_2$ داشته باشیم $f(x_1)\ge f(x_2)$، تابع **نزولی** (decreasing) نامیده می‌شود و در نهایت اگر به ازای هر $x_1<x_2$ داشته باشیم $f(x_1)>f(x_2)$، تابع **نزولی اکید** می‌باشد.

به عنوان مثال، تابع $f(x)=x$ یک تابع صعودی اکید و تابع $g(x)=-x$ یک تابع نزولی اکید است.

❖ **تعریف تابع پوشا:** یک تابع مانند $f:X\to Y$ را پوشا (Onto یا subjective) می‌نامیم، اگر و تنها اگر به ازای هر عضو دلخواه $y\in Y$، عضوی مانند $x\in X$ وجود داشته باشد که $f(x)=y$ باشد.

نکته۳۳: شرط لازم برای پوشا بودن تابع این است که اندازه مجموعه دامنه از اندازه مجموعه برد کوچکتر نباشد.

اگر توابع f و g به صورت مقابل تعریف شده باشند: $g(x)=x^۲,\quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f=\{(a,۳),(b,۲),(c,۱),(d,۳)\}$



در این صورت f یک تابع پوشا می‌باشد؛ زیرا به هر عضو مجموعه $\{۱,۲,۳\}$ یکی از عناصر دامنه نظیر شده است. (شکل مقابل)

اما تابع g یک تابع پوشا نیست؛ زیرا به عنوان مثال $-۲\in\mathbb{R}$؛ اما نمی‌توان هیچ عدد حقیقی یافت که $x^۲=-۲$ باشد.

دقت کنید که تابع g اگر به صورت $g:\mathbb{R}\to[۰,+\infty)$ در نظر گرفته شود یک تابع پوشا خواهد بود.

مثال۸۹: فرض کنید ۶ امتحان داریم که از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری شده و به‌صورت زیر دانشجوی مشترک دارند. حداقل روزهای لازم برای برگزاری امتحان‌ها به‌طوری که هیچ دانشجویی در یک روز بیش از یک امتحان نداشته باشد، کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

۱,۲	۱,۶	۱,۳	۱,۵
۲,۳	۲,۶	۴,۵	۳,۴
۳,۶	۳,۵	۶,۵	

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر دو درس i و j را هیچ دانشجویی باهم نگرفته باشند، امتحان این دو درس می‌تواند در یک روز برگزار شود. دروس (۱و۴)، (۲و۴)، (۲و۵) و (۴و۶) با هم تداخل ندارند. می‌توان امتحان‌های ۱ و ۴ را در یک روز و امتحان‌های ۲ و ۵ را در روز دیگر برگزار کرد. در این حالت به ۴ روز برای امتحان‌ها نیاز داریم.

مثال۹۰: تعداد توابع صعودی از $\{۱,۲,۳\}$ به $\{۱,۲,۳,۴\}$ کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» می‌توان ۳ عدد با تکرار از مجموعه اعداد $\{۱,۲,۳,۴\}$ انتخاب نمود. ترتیب صعودی این ۳ عدد، ترتیب مقدار تابع به ازای ورودی اعداد ۱ تا ۳ خواهد بود. تعداد راه‌های انتخاب ۳ عدد با تکرار از بین اعداد ۱ تا ۴ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی رابطه زیر:

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۳$$

تعداد این جواب‌ها برابر $۲۰=\binom{۶}{۳}$ خواهد بود.

مثال۹۱: تعداد توابع $f:\{۱,\cdots,۹\}\to\{۱,۲,۳\}$ که دارای برد ۲ عضوی هستند، کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

۱) ۱۵۲۴ ۲) ۱۵۳۰ ۳) ۱۵۳۶ ۴) ۱۵۴۲

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» کافی است دو عدد از سه عدد مجموعه برد را به $\binom{۳}{۲}=۳$ حالت انتخاب کنیم. سپس تعداد توابع پوشا از مجموعه ۹ عضوی به مجموعه ۲ عضوی را محاسبه نماییم. تعداد توابع پوشا از مجموعه ۹ عضوی به مجموعه ۲ عضوی $۲^۹-۲=۵۱۰$ عدد است. جواب مسأله برابر است با $۳\times۵۱۰=۱۵۳۰$.

نکته۳۴: تعداد توابع پوشا مانند $f:X\to Y$ که $|X|=m$ و $|Y|=n$ برابر است با:

$$\sum_{i=۰}^{n-۱}(-۱)^i\binom{n}{n-i}(n-i)^m$$

❖ **تعریف تابع دوسویی:** تابع f یک **تناظر یک به یک** (one – to – one correspondence) یا یک تابع دوسویی (bisection) نامیده می‌شود، اگر یک به یک و پوشا باشد. به عنوان مثال، تابع f که به صورت زیر تعریف شده یک تابع دوسویی از $\{a,b,c,d\}$ به $\{۱,۲,۳,۴\}$ می‌باشد:

$$f=\{(a,۴),(b,۲),(c,۱),(d,۳)\}$$

با توجه به تعریف تابع دوسویی می‌توان گفت اگر $f:X\to Y$ یک تناظر یک به یک باشد، آنگاه باید $|X|=|Y|$ باشد.

نکته۳۵: تعداد توابع دوسویی $f:X\to Y$ که $|X|=|Y|=n$ برابر با $n!$ می‌باشد.

با توجه به تعریف تناظر یک به یک، می‌توان گفت کاردینال دو مجموعه با یکدیگر برابر است، اگر و تنها اگر یک تناظر یک به یک بین آنها برقرار باشد. این مفهوم قابل گسترش به مجموعه‌های نامتناهی نیز می‌باشد.

به عنوان مثال، مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد طبیعی زوج دارای کاردینال یکسانی می‌باشند؛ زیرا می‌توان تناظر یک به یک زیر را بین آنها تعریف نمود: $f(n) = ۲n$

این تناظر در شکل زیر مشخص است:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & n & \bullet & \bullet & \bullet \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & & & \updownarrow & & & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & \cdot & \cdot & \cdot & 2n & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

دقت نمایید که در مجموعه‌های متناهی اگر داشته باشیم $A \subset B$، آنگاه کاردینال A کوچک‌تر از B می‌باشد ($|A| < |B|$) اما این رابطه در مجموعه‌های نامتناهی برقرار نیست. به عنوان مثال، اگر E را مجموعه اعداد طبیعی زوج در نظر بگیریم، آنگاه داریم:

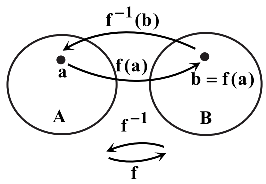
$$E \subset N \quad , \quad |E| = |N| = \aleph_0$$

به عنوان مثال دیگر، مجموعه‌های $N \times N$ و Q مجموعه‌های شمارا می‌باشند؛ اما مجموعه R یا بازه‌ی (a, b) (که $a < b$) شمارا نمی‌باشد.

نکته۳۶: اجتماع تعداد متناهی از مجموعه‌های شمارا یک مجموعه شمارا می‌باشد.

❖ **تعریف تابع وارون:** اگر $f : X \to Y$ یک به یک و پوشا باشد، آنگاه **وارون** (inverse) تابع f با $f^{-۱}$ نشان داده می‌شود که $f^{-۱} : Y \to X$ یک تابع است و داریم: $f^{-۱}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$

شکل زیر را می‌توان برای بیان مفهوم تابع وارون در نظر گرفت:



اگر توابع f و g به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$f : \{a, b, c\} \to \{۱, ۲, ۳\} \quad , \quad f(a) = ۲ \quad , \quad f(b) = ۳ \quad , \quad f(c) = ۱$$

$$g(x) = x + ۱$$

تابع وارون f به صورت مقابل می‌باشد: $f^{-۱} : \{۱, ۲, ۳\} \to \{a, b, c\}, f^{-۱}(۱) = c, f^{-۱}(۳) = b, f^{-۱}(۲) = a$

برای تعیین تابع $g^{-۱}$ کافی است دقت کنیم که اگر تصویر x را y فرض کنیم، آنگاه $y = x + ۱$؛ بنابراین $y - ۱$ توسط g به y نگاشت می‌شود و در نتیجه:

$$g^{-۱}(y) = y - ۱$$

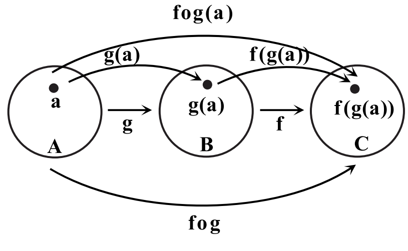
تذکر۷: وارون تنها در مورد توابع یک به یک و پوشا تعریف می‌گردد.

❖ **تعریف تابع fog:** اگر $g : X \to Y$ یک تابع باشد و $f : Y \to Z$ تابع دیگری باشد، آنگاه ترکیب دو تابع f و g را به صورت fog نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(fog)(a) = f(g(a))$$

به عبارت دیگر، تابع fog مقداری که به a متناظر می‌کند، همان مقداری است که تابع f به ورودی g(a) انتساب می‌دهد.

ترکیب fog تنها در صورتی قابل تعریف است که برد تابع g زیرمجموعه دامنه تابع f باشد. شکل زیر ترکیب دو تابع را بهتر نشان می‌دهد.



فرض کنید توابع f و g به‌صورت زیر تعریف شده باشند:

$$f = \{(a, ۳), (b, ۲), (c, ۱)\} \quad , \quad g = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$$

در این صورت تابع fog به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$fog(a) = f(g(a)) = f(b) = ۲ \qquad fog(b) = f(g(b)) = f(c) = ۱ \qquad fog(c) = f(g(c)) = f(a) = ۳$$

حل روابط بازگشتی با استفاده از تابع مولد

از تابع مولد در حل روابط بازگشتی نیز می‌توان استفاده کرد. روش استفاده را با یک مثال مرور می‌کنیم.

می‌خواهیم جواب صریح رابطه بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + n$ با فرض $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ را بیابیم.

در استفاده از توابع مولد در حل رابطه بازگشتی ابتدا باید تمام مقادیر را در x به توان بزرگترین اندیس رابطه بازگشتی ضرب کنیم. خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ll}
a_2 = 2a_1 - a_0 + 2 & a_2x^2 = 2a_1x^2 - a_0x^2 + 2x^2 \\
a_3 = 2a_2 - a_1 + 3 & a_3x^3 = 2a_2x^3 - a_1x^3 + 3x^3 \\
a_4 = 2a_3 - a_2 + 4 & a_4x^4 = 2a_3x^4 - a_2x^4 + 4x^4 \\
\vdots & \vdots \\
a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + n & a_nx^n = 2a_{n-1}x^n - a_{n-2}x^n + nx^n \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

سپس تمام مقادیر را با هم جمع می‌کنیم و سعی در برابر نمودن اندیس جملات رابطه بازگشتی و توان n داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} nx^n \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_nx^n = 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n - x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n + \sum_{n=2}^{\infty} nx^n$$

حال با اضافه کردن تعدادی جمله به هر سیگما سعی داریم فرم همه آن‌ها را به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ درآوریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n - a_0 - a_1x = 2x(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n - a_0) - x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n - x$$

حال قرار می‌دهیم $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. اگر دقت کرده باشید، $g(x)$ همان تابع مولد دنباله جملات رابطه بازگشتی است. با محاسبه $g(x)$ قادر خواهیم بود که مقدار صریح تمام جملات رابطه بازگشتی را محاسبه کنیم.

$$g(x) - a_0 - a_1x = 2x(g(x) - a_0) - x^2g(x) + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n - x \Rightarrow g(x) - x = 2xg(x) - x^2g(x) + \sum_{n=0}^{\infty} nx^n - x$$

مقدار $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ را با تابع مولد متناظرش یعنی $\frac{x}{(1-x)^2}$ جایگزین می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$g(x) = 2xg(x) - x^2g(x) + \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow g(x)(1 - 2x + x^2) = \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{(1-x)^4}$$

برای محاسبه جمله iاُم از رابطه بازگشتی کافیست ضریب x^i در تابع مولد دنباله را محاسبه کنیم.

$$g(x) = \frac{x}{(1-x)^4} = x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+4-1}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{n}x^{n+1}$$

در نتیجه ضریب جمله x^i به ازای $i > 1$ برابر است با $\binom{i+2}{i-1}$.

مثال۶۵: تابع مولد مربوط به دنباله اعداد فیبوناچی زیر در کدام گزینه آمده است؟

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$
$$F_1 = 1 \qquad F_0 = 0$$

۱) $\frac{x}{1+x+x^2}$ ۲) $\frac{1}{1-x+x^2}$

۳) $\frac{1}{1+x-x^2}$ ۴) $\frac{x}{1-x-x^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» جملات رابطه $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ را در x^n ضرب کرده و به ازای مقادیر $n \geq 2$ حاصل جمع مقادیر هر دو طرف تساوی را محاسبه می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_nx^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n$$

حال تمام جملات را به فرم $F_n x^n$ می‌نویسیم.

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

سپس با اضافه نمودن چند جمله ابتدایی به دنباله‌ها، همه سیگماها را به فرم $\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ می‌نویسیم:

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0 - F_1 x = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0\right) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

با فرض اینکه $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ خواهیم داشت:

$$g(x) - F_0 - F_1 x = xg(x) - xF_0 + x^2 g(x)$$

با جایگذاری مقادیر F_0 و F_1 در رابطه داریم:

$$g(x) - x = xg(x) + x^2 g(x) \Rightarrow g(x)(1 - x - x^2) = x \Rightarrow g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

مثال ۶۶: جواب صریح رابطه بازگشتی $(n \ge 0)$ $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n$ با فرض $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$ را محاسبه کنید.

☑ **پاسخ:** عبارت‌ها را به ازای $n \ge 0$ در x^{n+2} ضرب می‌کنیم و حاصل‌جمع آن‌ها را می‌نویسیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 4a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 4a_{n-2} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 2^{n-2} x^n$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_1 x - a_0\right) - \left(4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 4a_0 x\right) + \left(4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=-2}^{\infty} (2x)^n$$

حال به جای عبارت $\sum_{i=0}^{\infty} a_n x^n$ تابع $g(x)$ را قرار داده و به a_0 و a_1 مقدار می‌دهیم:

$$\Rightarrow g(x) - 2x - 1 - 4x\,g(x) + 4x + 4x^2 g(x) = \frac{\frac{1}{4}}{1-2x} - \frac{2x}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow g(x)(1 - 4x + 4x^2) = -4x + 2x - \frac{x}{2} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{1-2x} = -\frac{5x}{2} + \frac{3}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{1-2x} \Rightarrow g(x) = \frac{\frac{3}{4}}{(1-2x)^2} - \frac{\frac{5x}{2}}{(1-2x)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{(1-2x)^3}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{3}{4}\binom{n+1}{n} 2^n - \frac{5}{2}\binom{n}{n-1} 2^{n-1} + \frac{1}{4}\binom{n+2}{n} 2^n$$

مثال ۶۷: رابطه بازگشتی مقابل توسط کدام تابع مولد تولید می‌شود؟ $\quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + 2 \;;\quad a_0 = 3 \;,\; a_1 = 7$

۱) $\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1-3x}$ $\quad$ ۲) $\frac{2}{1+x} + \frac{1}{1+3x}$ $\quad$ ۳) $\frac{4}{1-x} - \frac{1}{1+x}$ $\quad$ ۴) $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-3x}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» جملات را در x^{n+2} ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$a_{n+2}x^{n+2} - 5a_{n+1}x^{n+2} + 6a_n x^{n+2} = 2x^{n+2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} - 5x\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} + 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

با در نظر گرفتن $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ داریم:

$$(f(x) - a_0 - a_1 x) - 5x(f(x) - a_0) + 6x^2 f(x) = \frac{2x^2}{1-x}$$

$$(f(x) - 3 - 7x) - 5x(f(x) - 3) + 6x^2 f(x) = \frac{2x^2}{1-x} \Rightarrow (1 - 5x + 6x^2)f(x) = \frac{(3-5x)(1-2x)}{(1-x)}$$

$$f(x) = \frac{3-5x}{(1-3x)(1-x)} = \frac{2}{1-3x} + \frac{1}{1-x}$$

مثال۶۸: رابطه بازگشتی مقابل را در نظر بگیرید. $h_n = h_{n-1} + 6h_{n-2} \quad ; \quad h_0 = 8 \;,\; h_1 = 9$

با توجه به این رابطه، تابع مولد $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $f(x) = \frac{8+x}{1-x-6x^2}$ ۲) $f(x) = \frac{8-x}{1+x+6x^2}$ ۳) $f(x) = \frac{4-2x}{1+x+3x^2}$ ۴) $f(x) = \frac{4+2x}{1-x-3x^2}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» با توجه به رابطه بازگشتی، رابطه $f(x) = xf(x) + 6x^2 f(x)$ برقرار خواهد بود. تابع مولد را می‌توان به طریق زیر به دست آورد:

$$f(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \dots$$
$$-xf(x) = -h_0 x - h_1 x^2 - h_2 x^3 \dots$$
$$\underline{-6x^2 f(x) = -6h_0 x^2 - 6h_1 x^3 - \dots}$$
$$(1-x-6x^2)f(x) = h_0 + (h_1 - h_0)x + \sum_{n=p}^{\infty} (h_{n+2} - h_{n+1} - 6h_n) x^{n+2} = h_0 + (h_1 - h_0)x$$
$$f(x) = \frac{8+x}{1-x-6x^2}$$

به جز جملات h_0 و $(h_1 - h_0)x$، سایر جملات (ضرایب $x^2, x^3, \dots$) به فرم $h_n - h_{n-1} - 6h_{n-2}$ درمی‌آیند که طبق صورت مسأله حاصل این عبارات برابر صفر است.

مثال۶۹: تابع مولد دنباله فیبوناچی $\{a_n\}_{n\geq 0}$ که در آن شرایط اولیه $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ و رابطه بازگشتی $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ برای هر $n \geq 2$ برقرار است، کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۱)

۱) $G(x) = \frac{-x}{x^2+x+1}$ ۲) $G(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$ ۳) $G(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$ ۴) $G(x) = \frac{-x}{x^2+x-1}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» رابطه‌ی داده شده را به ازای nهای مختلف به صورت زیر می‌نویسیم:

$$n = 2 : a_2 = a_1 + a_0$$
$$n = 3 : a_3 = a_2 + a_1$$
$$n = 4 : a_4 = a_3 + a_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$n$$

حال معادله اول را در x^2، معادله دوم را در x^3 و به همین ترتیب معادله‌ی nام را در x^n ضرب می‌کنیم و بی‌نهایت معادله فوق را با هم جمع کرده و مجموع را به صورت روبه‌رو محاسبه می‌کنیم: $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$

با تعریف $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ داریم: $G(x) - a_0 x^0 - a_1 x^1 = x(G(x) - a_0 x^0) + x^2 G(x) \Rightarrow G(x)(1-x-x^2) = x \Rightarrow G(x) = \frac{-x}{x^2+x-1}$

مثال۷۰: تابع مولد متناظر با رابطه بازگشتی $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3n$ با مقادیر اولیه $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$ چه خواهد بود؟

۱) $\frac{3x+2x(1-x)^2}{(1-x)^2(1-2x-2x^2)}$ ۲) $\frac{3x+2x(1-x)}{(1-x)^2(1-2x-2x^2)}$ ۳) $\frac{3x-2x(1-x)^2}{(1-x)^2(1-2x-2x^2)}$ ۴) $\frac{3x-2x(1-x)}{(1-x)^2(1-2x-2x^2)}$

☑ **پاسخ:** گزینه«۳» جملات رابطه را در x به توان بزرگترین جمله ضرب کنیم و حاصل‌جمع تمام مقادیر را محاسبه نمائیم. خواهیم داشت:

$$a_n x^n = 2a_{n-1} x^n + 2a_{n-2} x^n + 3nx^n$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 3 \sum_{n=2}^{\infty} nx^n$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - a_0 - a_1 x = 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - 2xa_0 + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \frac{3x}{(1-x)^2} - 3(0)x^0 - 3x$$

حال با فرض $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ خواهیم داشت:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \Rightarrow f(x)(1-2x-2x^2)=\frac{3x}{(1-x)^2}-2x \Rightarrow f(x)=\frac{3x-2x(1-x)^2}{(1-x)^2(1-2x-2x^2)}$$

مثال ۷۱: فرم صریح معادل با رابطه بازگشتی $a_n=\sum_{i=0}^{n-1}a_ia_{n-i-1}$ را با فرض $a_0=1$ بیابید.

پاسخ: اگر $g(x)$ را تابع مولد دنباله a_n در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$g^2(x)=a_0a_0+(a_0a_1+a_1a_0)x+(a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0)x^2+\dots \Rightarrow g^2(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{i}a_ja_{i-j})x^i$$

با ضرب x در این عبارت داریم:

$$xg^2(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{i}a_ja_{i-j})x^{i+1}=g(x)-a_0=g(x)-1 \Rightarrow xg^2(x)-g(x)+1=0$$

حال مقدار $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم (توجه کنید که برای هر $x=x_0$ مقدار x_0 یک عدد ثابت برای $g(x_0)$ است):

$$g(x)=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4x}}{2x}=\frac{1\pm(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2x}$$

حال به بسط مک‌لورن برای محاسبه جواب رابطه بازگشتی نیاز داریم. توجه کنید که به ازای هر x، دو مقدار برای $g(x)$ خواهیم داشت که یکی مثبت و دیگری منفی خواهد بود. با توجه به اینکه مقدار دنباله همواره مثبت است، باید مقادیر مثبت از $g(x)$ را محاسبه کنیم.

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\dots(\frac{1}{2}-i+1)(-4)^ix^i}{i!} \Rightarrow g(x)=\frac{1\pm\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-i+1)(-4)^ix^i}{i!}}{2x}$$

مقدار ثابت را از سیگما بیرون می‌آوریم:

$$g(x)=\frac{\pm\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-i+1)(-4)^ix^i}{i!}}{2x}$$

با در نظر گرفتن جملات مثبت داریم:

$$g(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})(\frac{5}{2})\dots(\frac{2i-3}{2})(4)^ix^{i-1}}{i!}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{3}{2})\dots(\frac{2i-1}{2})2^{2i+1}x^i}{(i+1)!}$$

با ضرب صورت و مخرج در $i!$ و ضرب تمام جملات صورت در ۲ به عبارت زیر می‌رسیم:

$$g(x)=g(x)\times\frac{i!}{i!}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2\times4\times6\times\dots\times2i\times1\times3\times5\times\dots\times(2i-1)}{(i+1)!(i)!}x^i=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2i)!}{i!(i+1)!}x^i \Rightarrow g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+1)}\binom{2i}{i}x^i$$

در نتیجه ضریب x^n برابر $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ یعنی جمله nام از اعداد کاتالان خواهد بود.

مثال ۷۲: می‌خواهیم ترتیبی از سکه‌های یک شکل روی ردیفی از n سکه مجاور و متصل به هم ایجاد کنیم. سکه‌هایی که در پایین‌ترین ردیف قرار ندارند بر روی دو سکه زیر خود قرار می‌گیرند و این که سکه به پشت قرار گرفته است یا رو مهم نیست. اگر a_n تعداد این ترتیب‌ها برای ردیفی از n سکه مجاور و متصل بوده و $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ تابع مولد آن باشد، کدام رابطه درست است؟

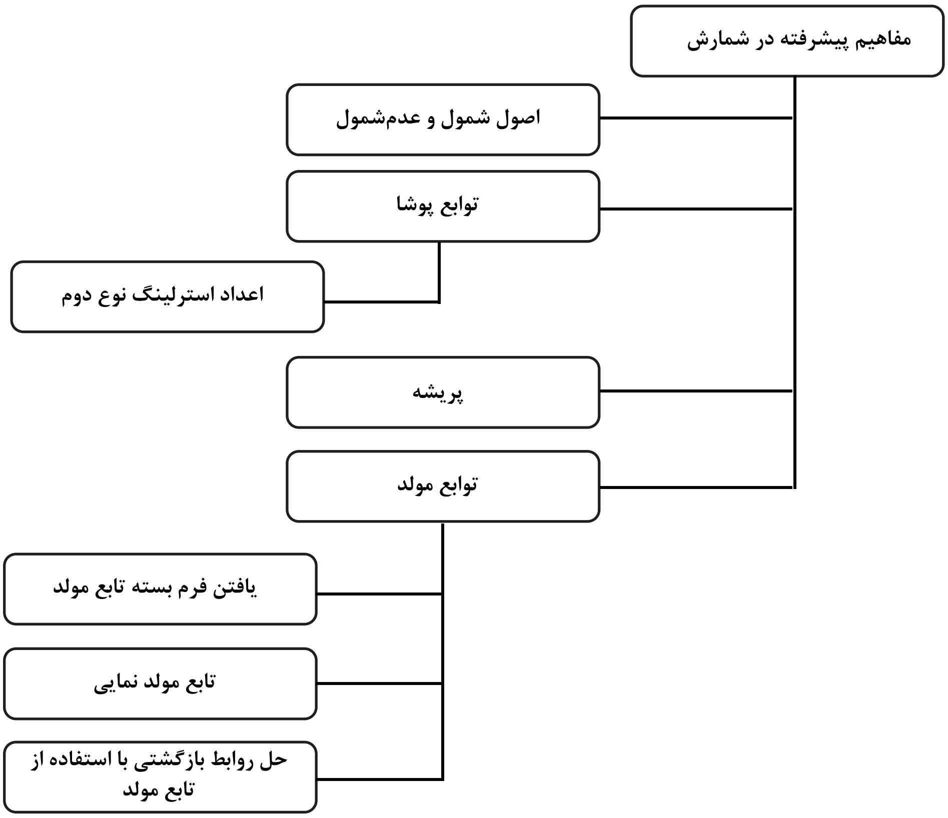
(مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۹۲)

۱) $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$　　۲) $f(x)=\frac{1-\sqrt{1-2x}}{4x}$　　۳) $f(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$　　۴) $f(x)=\frac{1+\sqrt{1-2x}}{4x}$

پاسخ: گزینه «۱» پاسخ مسأله برابر n امین جمله از دنباله اعداد کاتالان است که گزینه (۳) تابع مولد این دنباله را نشان می‌دهد.

خلاصه فصل ششم

در این فصل با مطالب زیر آشنا شدیم.



اصل شمول و عدم‌شمول

اصل شمول و عدم‌شمول یک تکنیک شمارش است که شمارش اجتماع و اشتراک دو مجموعه متناهی را بسط می‌دهد. در صورتی که S مجموعه‌ای با n عضو باشد و $c_1, c_2, ..., c_k$ شرایطی باشند که هریک در تعدادی از عناصر مجموعه صدق کنند، برای بررسی صدق کردن m شرط روی مجموعه باید صدق کردن دو به دو، سه به سه و ... $m-1$ به $m-1$ تای شرطها را بررسی نماییم.

توابع پوشا

تعداد توابع پوشا برابر تعداد راه‌های قرار دادن اشیاء متفاوت در ظروف متمایز است، به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند. با توجه به اصل شمول و طرد، تعداد توابع پوشا از مجموعه n عضوی به مجموعه m عضوی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\text{تعداد توابع پوشا} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

اعداد استرلینگ نوع دوم

تعداد راه‌های قرار دادن m شیء متمایز در n ظرف مشابه به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند با استفاده از اعداد استرلینگ نوع دوم محاسبه می‌شود. رابطه بازگشتی برای اعداد استرلینگ نوع دوم به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$S(m,n)=S(m-1,m-1)+nS(m-1,n)$$

پریشه

منظور از پریشه، قرار گرفتن N شیء متمایز در n جایگاه متمایز است، به طوری‌که هیچ شیئی در جایگاه با اندیس خودش قرار نگیرد. این تعداد در رابطه مقابل به کمک اصل شمول و طرد محاسبه می‌شود:

$$\text{تعداد پریشه‌ها} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!$$

توابع مولد

تابع مولد ابزاری قدرتمند در مبحث شمارش است که روی توان و ضرایب چندجمله‌ای‌ها کار می‌کند.

تابع مولد دنباله $<g_0, g_1, g_2, ...>$ به‌صورت $G(x)=g_0+g_1x+g_2x^2+g_3x^3+....$ می‌باشد.

توابع مولد دنباله‌های زیر در مقابلشان آمده است:

$$<1,-1,1,-1,\dots> \leftrightarrow 1-x+x^2-x^3+x^4-\dots=\frac{1}{1+x}$$

$$<1,1,1,1,\dots> \leftrightarrow 1+x+x^2+x^3+\dots=\frac{1}{1-x}$$

$$<1,0,1,0,1,0,\dots> \leftrightarrow 1+x^2+x^4+x^6+\dots=\frac{1}{1-x^2}$$

$$<1,a,a^2,a^3,\dots> \leftrightarrow 1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\dots=\frac{1}{1-ax}$$

$$<\underbrace{1,1,1,1,\dots,1}_{k\text{ بار}},0,0,0,0,\dots> \leftrightarrow 1+x+x^2+\dots+x^{k-1}=\frac{1-x^k}{1-x}$$

از قوانین زیر می‌توان برای ترکیب توابع مولد دنباله‌ها استفاده نمود:

نام قانون	حکم	فرضیات
۱ـ تغییر مقیاس	$cg_0+cg_1x+cg_2x^2+\dots=cG(x)$	$g_0+g_1x+g_2x^2+\dots=G(x)$
۲ـ جمع	$f_0+g_0+(f_1+g_1)x+\dots=F(x)+G(x)$	$f_0+f_1x+f_2x^2+\dots=F(x)$ $g_0+g_1x+g_2x^2+\dots=G(x)$
۳ـ شیفت به راست	$f_0x^k+f_1x^{k+1}+f_2x^{k+2}=F$	$f_0+f_1x+f_2x^2+\dots=F(x).x^k$
۴ـ مشتق‌گیری	$g_1+2g_2x^2+3g_3x^3+\dots=G'(x)$	$g_0+g_1x+g_2x^2+\dots=G(x)$
۵ـ مجموع‌یابی	$g_0+(g_0+g_1)x+(g_0+g_1+g_2)x^2=\frac{G(x)}{1-x}$	$g_0+g_1x+g_2x^2+\dots=G(x)$

یافتن فرم بسته

دلیل استفاده از فرم بسته محاسبه سریع ضریب هر جمله از چندجمله‌ای است. فرم‌های مطلوب در محاسبه ضرایب به شرح زیر است:

$$(z=ax^b)$$

$$(1+z)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}z^i=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}z^2+\dots+\binom{n}{n}z^n$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{i=0}^{\infty}z^i=1+z+z^2+\dots \quad , \quad \frac{1-z^{n+1}}{1-z}=\sum_{i=0}^{n}z^i=1+z+z^2+\dots+z^n \quad , \quad \frac{1}{(1-z)^n}=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+n-1}{i}z^i$$

با توجه به سری مک‌لورن ضریب جمله iاُم از $(1+cx)^n$ به ازای مقادیر حقیقی n برابر است با $\frac{c^i}{i!}(n)(n-1)\dots(n-i+1)$. در واقع داریم:

$$(1+cx)^n=1+ncx+\frac{n(n-1)c^2x^2}{2!}+\dots=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)c^nx^n}{i!}$$

تابع مولد نمایی

تابع مولد نمایی در حالتی استفاده می‌شود که ترتیب اشیاء اهمیت داشته باشند. تابع مولد نمایی دنباله $<a_0,a_1,a_2,\dots>$ به صورت زیر خواهد بود:

$$g(x)=a_0+a_1x+\frac{a_2x^2}{2!}+\frac{a_3x^3}{3!}+\dots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{a_ix^i}{i!}$$

برای ساده‌سازی عبارت‌های نمایی می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

$$(e^x)^n=e^{nx} \qquad (e^{ax}+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i}e^{aix}$$

$$e^{ax}e^{bx}=e^{(a+b)x} \qquad \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)e^x=\frac{e^{2x}+1}{2}$$

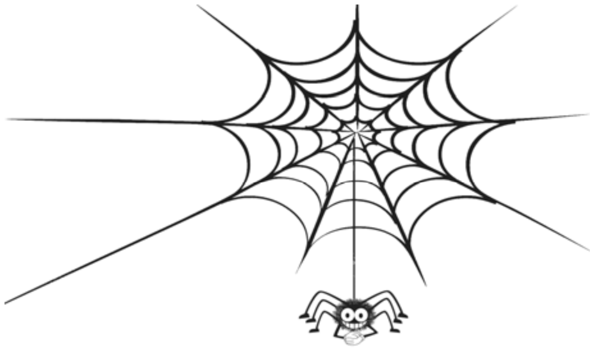
حل روابط بازگشتی با استفاده از تابع مولد

برای حل یک رابطه بازگشتی با استفاده از توابع مولد ابتدا جملات رابطه بازگشتی را به ازای تمام مقادیر قابل قبول اندیس آن‌ها، در x بـه تـوان بزرگتـرین اندیس ضرب می‌کنیم؛ سپس از تغییر متغیر $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ استفاده کرده و رابطه را برحسب $g(x)$ می‌نویسیم و بعد $g(x)$ را به یک یا مجموع چند فرم مطلوب درمی‌آوریم.

مدرسان شریف

فصل هفتم

«نظریه گراف»



مقدمه

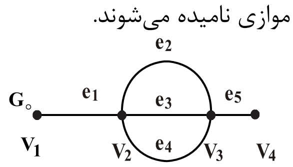
گراف از معدود موضوعات علوم کامپیوتر و ریاضی است که تاریخ پیدایش مشخصی دارد، به طوری که در سال ۱۹۳۶ اولین کتاب در زمینه نظریه گراف چاپ شد. **نظریه گراف** (**Graph Theory**) در سال ۱۷۳۶ میلادی با چاپ راه‌حل مسأله پل کونیگسبرگ توسط اویلر پدید آمد. اویلر در ابتدا بنا به درخواست پدرش در رشته الهیات مشغول به تحصیل شد؛ اما پس از کشف استعداد ریاضی او توسط ژوهان برنولی و به‌دلیل علاقه شخصی‌اش، در رشته ریاضیات تحصیل نمود. از او بیش از ۱۰۰۰ مقاله و کتاب چاپ شده، بر جای مانده است. اویلر ۱۷ سال آخر زندگی خود را با چشمان نابینا سپری کرد؛ اما در آن سال‌ها نیز چاپ مقالات علمی او متوقف نشد.

درسنامه(۱): مفاهیم اولیه گراف

❖ **تعریف گراف (Graph):** یک گراف مانند G عبارت است از یک مجموعه غیرتهی مانند $V(G)$ که مجموعه رأس‌ها «vertex» نامیده می‌شود و یک مجموعه مانند $E(G)$ (می‌تواند تهی باشد) که مجموعه یال‌ها «edge» نامیده می‌شود. هریک از اعضای مجموعه E یک زوج مرتب یا غیرمرتب از اعضای مجموعه V می‌باشد. گراف G را به صورت $G=(V,E)$ نمایش می‌دهیم. هر یال دو رأس را به هم متصل می‌کند. اگر یال e دو رأس V_1 و V_2 را به یکدیگر متصل کند، آنگاه e به صورت $\{V_1,V_2\}$ یا V_1V_2 نمایش داده می‌شود و دو رأس V_1 و V_2 همسایه یا مجاور (adjacent) نامیده می‌شوند.

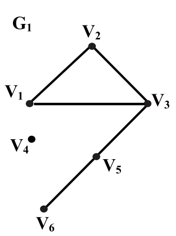
تذکر ۱: تعداد رأس‌های یک گراف، مرتبه (order) گراف و تعداد یال‌های آن، اندازه (size) گراف نامیده می‌شود.

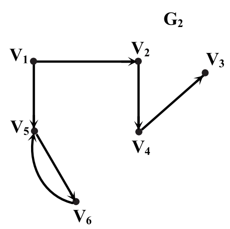
❖ **تعریف یال موازی (parallel edge):** یال‌هایی که دو رأس یکسان را به هم متصل می‌کنند، موازی نامیده می‌شوند.



به عنوان مثال، گراف G_0 دارای یال‌های موازی بین رئوس V_2 و V_3 است.

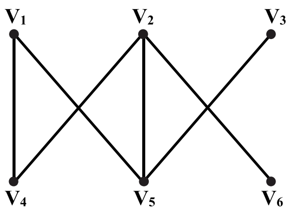
❖ **تعریف گراف جهت‌دار:** اگر اعضای مجموعه $E(G)$ در گراف G زوج‌های مرتب باشند، یعنی ترتیب آن‌ها مهم باشد، آنگاه گراف حاصل جهت‌دار خواهد بود و در غیر این صورت، گراف بدون جهت است.





در شکل مقابل، G_1 یک گراف بدون جهت و G_2 یک گراف جهت‌دار را نشان می‌دهد.

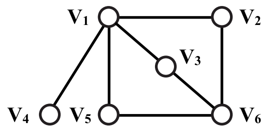
گراف‌های ویژه



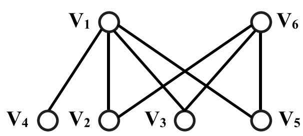
❖ **تعریف گراف دوبخشی (Bipartite graph):** گراف G را یک گراف دوبخشی می‌گوییم، اگر بتوان مجموعه $V(G)$ را به دو مجموعه ناتهی مانند V_1 و V_2 افراز کرد، به طوری که هر یال گراف G یک رأس از V_1 را به یک رأس از V_2 متصل کند.

به عنوان مثال، گراف شکل روبه‌رو یک گراف دوبخشی است که در آن $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ و $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، بین رئوس v_1، v_2 و v_3 هیچ یالی وجود ندارد. همچنین بین رئوس v_4، v_5 و v_6 نیز هیچ یالی موجود نیست.

به عنوان مثال دیگر، گراف موجود در شکل روبه‌رو یک گراف دوبخشی است که می‌توان مجموعهٔ رئوس آن را به دو زیرمجموعهٔ V_1 و V_2 افراز کرد:



این موضوع در شکل زیر نشان داده شده است که در آن $V_1 = \{v_1, v_6\}$ و $V_2 = \{v_4, v_2, v_3, v_5\}$ می‌باشد.



نکته۶: یک گراف مانند G دوبخشی است، اگر و تنها اگر هیچ دوری با طول فرد نداشته باشد (توضیح زیر برای درک بهتر این نکته ارائه شده است و می‌توانید از آن صرف‌نظر کنید).

ابتدا فرض کنید که G یک گراف دوبخشی است. در این صورت اثبات می‌کنیم که G هیچ دوری با طول فرد ندارد. فرض کنیم مجموعهٔ رئوس G یعنی $V(G)$ به دو مجموعهٔ V_1 و V_2 افراز شده است، به طوری که هیچ‌یک از رئوس موجود در V_1 و V_2 به یکدیگر متصل نمی‌باشند و هر یال از G یک رأس از V_1 را به یک رأس از V_2 متصل می‌کند. حال فرض کنیم دور $v_1v_2v_3\cdots v_nv_1$ یک دور دلخواه به طول n در G باشد. نشان می‌دهیم این دور دارای طول زوج می‌باشد. فرض کنیم $v_1 \in V_1$. با توجه به این که G دوبخشی است، $v_2 \in V_2$ می‌باشد و همچنین $v_3 \in V_1$ و ... . حال با توجه به این که بین v_n و v_1 یک یال وجود دارد، v_n نمی‌تواند عضو V_1 باشد؛ در نتیجه، $v_n \in V_2$ و بنابراین طول این دور زوج است.

برعکس، فرض کنیم G دارای هیچ دور فردی نباشد، ثابت می‌کنیم G دوبخشی است؛ یعنی افرازی از $V(G)$ مانند V_2 و V_1 را معرفی می‌کنیم، به طوری که هر یال G یک رأس از V_1 را به یک رأس از V_2 متصل می‌کند؛ اما بین هیچ دو رأسی از V_1 و یا V_2 هیچ یالی وجود ندارد.

دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

در حالت اول فرض می‌کنیم G یک گراف همبند باشد. در این حالت یک رأس دلخواه از G مانند V_1 را در نظر می‌گیریم. حال فرض کنیم مجموعهٔ V_1 از رئوس $V(G)$ شامل رئوسی باشد که کوتاه‌ترین مسیر آنها از V_1 دارای طول زوج است (چون گراف G را همبند فرض کرده‌ایم، بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود دارد) و مجموعهٔ V_2 را مجموعهٔ رئوس $V(G) - V_1$ در نظر می‌گیریم. حال ثابت می‌کنیم V_1 و V_2 افراز مورد نظر از مجموعه $V(G)$ را ایجاد می‌کنند؛ یعنی نشان می‌دهیم هیچ دو رأسی از مجموعه‌های v_j و v_k در V_2 قرار ندارند. بنابراین کوتاه‌ترین مسیر از v_1 به v_j و کوتاه‌ترین مسیر از v_1 به v_k دارای طول فرد است. این مسیرها را به ترتیب P و Q در نظر می‌گیریم. در این حالت مسیرهای P و Q به همراه یال v_jv_k یک دور به طول فرد در V_1 ایجاد می‌کند؛ این تناقض نشان می‌دهد که هیچ یالی بین رئوس V_2 وجود ندارد.

همین استدلال را می‌توانیم در مورد V_1 نیز به کار ببریم. حال فرض کنیم G ناهمبند باشد. در این حالت فرض می‌کنیم گراف G شامل مؤلفه‌های $G_1, G_2, \cdots, G_m$ باشد. با توجه به این که هر یک از مؤلفه‌ها همبند است، اثبات قبلی در مورد آنها صادق است و مجموعه رئوس $V(G_1), V(G_2), \ldots, V(G_m)$ به ترتیب به $V_1^{(1)}$، $V_2^{(1)}$، $V_1^{(2)}$، $V_2^{(2)}$، ...، $V_1^{(m)}$، $V_2^{(m)}$ افراز می‌شوند. حال کافیست قرار دهیم:

$$V_1 = \bigcup_{i=1}^{m} V_1^{(i)} \quad , \quad V_2 = \bigcup_{i=1}^{m} V_2^{(i)}$$

مثال ۳۸: کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) هر درخت را می‌توان به صورت یک گراف دوبخشی نمایش داد.

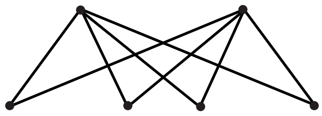
۲) گرافی را که تمام دورهای آن مضرب ۴ هستند، می‌توان به صورت یک گراف دوبخشی نمایش داد.

۳) می‌توان یک گراف ۵ رأسی دوبخشی تشکیل داد که مکملش نیز دوبخشی باشد.

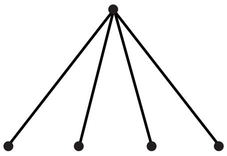
۴) هر گراف که دور به طول ۳ ندارد، لزوماً دوبخشی نیست.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» برای اینکه یک گراف و مکملش دوبخشی باشند، هر بخش از گراف می‌تواند حداکثر دو رأس داشته باشد. در غیر این صورت در مکمل گراف یک دور به طول ۳ خواهیم داشت. در نتیجه اگر قرار باشد یک گراف و مکملش دوبخشی باشند، این گراف می‌تواند حداکثر ۴ رأس داشته باشد.

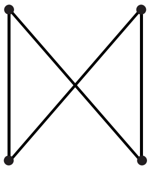
❖ **تعریف گراف کامل:** یک گراف دوبخشی، **کامل** نامیده می‌شود، اگر هر رأس از مجموعه V_1 به تمام رئوس مجموعه V_2 متصل باشد. در این حالت اگر $|V_1| = m, |V_2| = n$ گراف با $K_{m,n}$ نشان داده می‌شود. چند گراف دوبخشی کامل در شکل زیر آمده است:



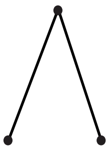
$K_{2,4}$



$K_{1,4}$

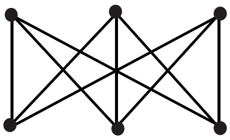


$K_{2,2}$

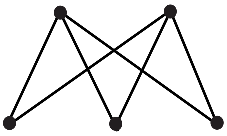


$K_{1,2}$

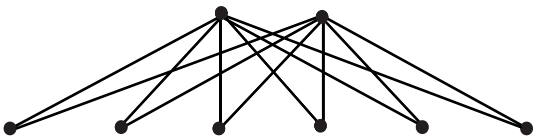
دقت کنید که لازم نیست در یک گراف دوبخشی حتماً دور با طول زوج وجود داشته باشد. به عنوان مثال، گراف $k_{1,2}$ را در نظر بگیرید:



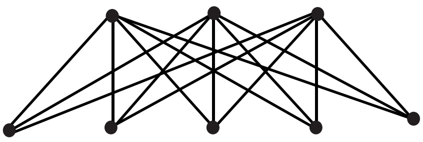
$K_{3,3}$



$K_{2,3}$



$K_{2,6}$



$K_{3,5}$

مثال ۳۹: کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد یک گراف دوبخشی دلخواه مانند G درست است؟

۱) G حداقل یک دور با طول زوج دارد.　　۲) G هیچ دوری با طول فرد ندارد.

۳) G حداقل یک دور با طول فرد دارد.　　۴) G هیچ دوری با طول زوج ندارد.

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» طبق قضیه بیان شده در متن درس، گزینه (۲) درست است. دقت کنید که در مورد وجود یا عدم وجود دور با طول زوج هیچ تضمینی وجود ندارد.

مثال ۴۰: یال‌های کدام‌یک از گراف‌های زیر را نمی‌توان به دورهای یال مجزا افراز کرد؟　(ریاضی ـ سراسری ۹۳)

۱) $K_{9,9}$　　۲) $K_{10,10}$　　۳) $K_{10,20}$　　۴) K_{11}

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» دورهای گرافی که مدار اویلری داشته باشد، می‌توان به چند دور مجزا افراز نمود. ولی عکس این عبارت لزوماً برقرار نیست. ممکن است گرافی اویلری نباشد ولی بتوان یال‌های آن را به دورهای مجزا افراز نمود. در چنین شرایطی باید درجه تمام رئوس گراف زوج باشد ولی نیاز به همبند بودن گراف نیست؛ زیرا هر رأس که در هر زیرگراف دوری قرار گرفته باشد، درجه‌اش در آن زیرگراف برابر ۲ است. گراف‌های $K_{10,10}$، $K_{10,20}$ و K_{11} اویلری هستند و یال‌های آن‌ها قابل افراز نمودن به دورهای مجزا می‌باشد. ولی درجه رئوس گراف $K_{9,9}$ فرد است و یال‌های این گراف را نمی‌توان به دورهای مجزا افراز نمود.

مثال ۴۱: در یک گراف دوبخشی کامل $k_{5,5}$ به چند روش می‌توانیم ۳ یال انتخاب کنیم، به طوری که هیچ دو یالی به یکدیگر متصل نباشند؟

۱) ۶۰　　۲) ۶۰۰　　۳) ۱۸۰　　۴) ۱۰۰

پاسخ: گزینه «۲» می‌دانیم هر یال در این گراف، دو رأس از دو بخش گراف را به یکدیگر متصل می‌کند؛ بنابراین از پنج رأس هر یک از دو بخش، سه رأس را انتخاب می‌کنیم.
سپس برای انتخاب اولین یال، می‌توانیم اولین رأس از بخش اول را به هر یک از سه رأس موجود در بخش دوم متصل کنیم، برای انتخاب دومین یال نیز می‌توانیم رأس دوم از بخش اول را به هر یک از دو رأس باقی‌مانده بخش دوم متصل کنیم و برای آخرین یال یک انتخاب باقی می‌ماند؛ یعنی پس از انتخاب رأس‌ها می‌توانیم به $3!$ طریق یال‌های مربوطه را انتخاب نماییم. بنابراین در کل، تعداد روش‌ها برابر است با:
در نتیجه کل حالات ممکن عبارتند از: $10\times10\times6=600$.

V_1	V'_1
V_2	V'_2
V_3	V'_3
V_4	V'_4
V_5	V'_5
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{3}$

مثال۴۲: **فرض کنید G گرافی $n+1$ رأسی باشد که با حذف هر رأس آن، دوبخشی می‌شود. کدام گزینه در خصوص G همواره درست است؟**
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

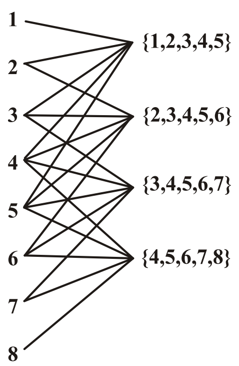
۱) G دوبخشی است.
۲) G مسطح است.
۳) تعداد یال‌های G کمتر از $\frac{n^2}{4}+n+1$ است.
۴) متمم G دارای رأسی با درجه ۰ است.

پاسخ: گزینه «۳» گراف کامل ۵ رأسی مثال نقضی برای گزینه‌های (۱) و (۴) است. گراف $K_{3,3}$ نیز مثال نقضی برای گزینه (۲) می‌باشد. یک گراف دوبخشی کامل n رأسی نمی‌تواند بیشتر از $\frac{n^2}{4}$ یال داشته باشد. رأس حذف شده نیز حداکثر می‌تواند با n رأس مجاور باشد. در نتیجه، حداکثر تعداد یال‌های این گراف برابر $\frac{n^2}{4}+n$ خواهد بود.

مثال۴۳: **گراف دوبخشی G که رأس‌های یک بخش آن $\{1,...,8\}$ و رأس‌های بخش دیگر، زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از اعضای متوالی $\{1,...,8\}$ هستند، را در نظر بگیرید. اعداد ۱ و ۸ متوالی در نظر گرفته نمی‌شوند. هر یال یک رأس را به مجموعه‌ای که عضو آن است، متصل می‌کند. کدام گزینه درباره این گراف درست است؟**
(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۵)

۱) گراف دارای ۲۰ یال است.
۲) گراف K_4 زیرگراف این گراف است.
۳) طول بلندترین مسیر در این گراف برابر با ۱۰ است.
۴) درجه همه‌ی رأس‌های گراف با هم برابر است.

پاسخ: گزینه «۱» گراف صورت سؤال به شکل مقابل است:



این گراف دارای ۲۰ یال است. با توجه به دوبخشی بودن، زیرگراف k_4 ندارد و از آنجایی که این گراف دوبخشی است، طول بلندترین مسیر حداکثر دو برابر تعداد رئوس بخش با رأس کمتر باشد (طول بلندترین مسیر برابر ۸ است). توجه کنید که درجه تمام رئوس این گراف برابر نیست.

مثال۴۴: **اگر A ماتریس مجاورت گراف کامل دوبخشی $K_{5,6}$ باشد، مجموع تمام درایه‌های ماتریس A^2 برابر است با:** (علوم کامپیوتر ـ دکتری ۹۳)

۱) ۶۰
۲) ۱۶۵
۳) ۳۳۰
۴) ۳۴۱

پاسخ: گزینه «۳» حاصل برابر مجموع گشت‌های به طول ۲ در این گراف است. کافیست تعداد حالات قرار گرفتن هر رأس در رأس میانی مسیر را محاسبه می‌کنیم. هر یک از رئوس بخش ۶ رأسی، ۵ انتخاب برای رأس مبدأ و ۵ انتخاب و رئوس بخش ۵ رأسی نیز ۶ انتخاب برای رأس مبدأ و ۶ انتخاب برای رأس مقصد دارند.
جواب $=5\times6\times6+6\times5\times5=5\times6\times(5+6)=330$

مثال۴۵: **فرض کنید G یک گراف ۲۰۰ رأسی باشد که هیچ سه‌رأسی دوبه‌دو به‌هم وصل نیستند. حداکثر تعداد یال‌های G برابر است با:**
(ریاضی ـ سراسری ۹۷)

۱) ۱۲۰۰۰
۲) ۸۰۰۰
۳) ۱۰۰۰۰
۴) ۵۰۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» این گراف دوبخشی است. گراف $K_{۱۰۰,۱۰۰}$ بیشترین تعداد یال‌ها از بین گراف‌های با این شرط را دارد. تعداد یال‌های این گراف برابر $۱۰۰ \times ۱۰۰ = ۱۰۰۰۰$ است.

مثال ۴۶: چند گراف دوبخشی با دو بخش $X = \{x_۱, x_۲, x_۳\}$ و $Y = \{y_۱, y_۲, y_۳\}$ می‌توان تشکیل داد؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۳)

۱) $۲^۶$ ۲) $۲^۹$ ۳) $۳^۳$ ۴) $۳^۸$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» تعداد یال‌های ممکن بین این دو بخش برابر است با $۳ \times ۳ = ۹$، حال برای هر یال دو حالت وجود دارد که در گراف مربوطه، یال مفروض موجود باشد یا نباشد؛ بنابراین براساس اصل ضرب، تعداد گراف‌های ممکن برابر است با $۲^۹$.

مثال ۴۷: چندتا از گزاره‌های زیر درست‌اند؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) و الگوریتم و محاسبات ـ دکتری ۹۲)

الف) اگر کمترین درجه‌ی رأس‌های یک گراف همبند G برابر δ باشد، آن‌گاه مسیری به طول حداقل $\delta + ۲$ در G وجود دارد.

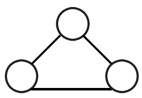
ب) اگر تمام رأس‌های گراف همبند G دارای درجه‌ی زوج باشند، آن‌گاه می‌توان یال‌های G را طوری جهت‌دهی کرد که گراف حاصل قویاً همبند باشد، به این معنی که از هر رأس گراف به تمام رأس‌های دیگر مسیر جهت‌دار وجود داشته باشد.

ج) گراف همبند دوبخشی G را تنها می‌توان به یک صورت به دو بخش افراز کرد، به‌طوری که در هر دو بخش یالی نباشد.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳»

الف) نادرست: به عنوان مثال گراف مقابل را در نظر بگیرید:



$\delta = 2$

اما مسیری به طول ۴ در این گراف وجود ندارد.

ب) درست: اگر در گراف موردنظر براساس مواد اویلری یال‌ها جهت‌دهی شوند، به یک گراف همبند قوی خواهیم رسید.

ج) درست: رئوس یک گراف دوبخشی همبند را فقط به یک طریق می‌توان به دو کلاس افراز کرد که هر کلاس بیانگر یک بخش از گراف دوبخشی باشد. یک رأس را به یک کلاس نسبت دهید. با توجه به اینکه در این گراف دوری به طول فرد وجود ندارد، نمی‌توان از رأس انتخابی به رئوس دیگر ۲ مسیر پیدا کرد که طول یک زوج و طول دیگری فرد باشد. تمام رئوس با فاصله زوج از رأس مذکور با آن رأس در یک کلاس قرار می‌گیرند و بقیه رئوس در کلاس دیگر قرار خواهند گرفت.

مثال ۴۸: فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف ساده و n رأسی G بوده و درایه‌ای غیرقطری از $\sum_{i=۰}^{n-۱} A^i$ برابر صفر باشد. کدام‌یک از احکام زیر همواره درست است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۳)

۱) G ناهمبند است. ۲) G دوبخشی نیست. ۳) G درخت است. ۴) G دوبخشی است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» وقتی درایه غیرقطری ماتریس حاصل صفر باشد، مثل درایه j و i، یعنی بین i و j نه مسیری به طول ۱ است، نه مسیری به طول ۲ و ... و نه مسیری به طول $n - ۱$. پس بین i و j هیچ مسیری وجود ندارد؛ بنابراین گراف مربوطه ناهمبند است.

مثال ۴۹: تعداد مسیرهای متمایز به طول حداکثر در گراف $k_{۱۰,۱۵}$ را محاسبه نمایید (مبدأ و مقصد مسیر متفاوت‌اند و جهت مسیر اهمیت ندارد).

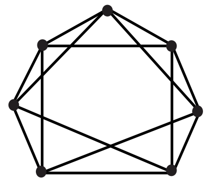
۱) $\frac{۱۰! \times ۱۱!}{۲}$ ۲) $\frac{۱۵! \times ۱۰!}{۲}$ ۳) $۱۵! \times ۱۰!$ ۴) $\frac{۱۵! \times ۱۰!}{۲ \times ۴!}$

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» با توجه به این‌که در گراف $k_{p,p}$ طول بزرگ‌ترین مسیر برابر $۲p - ۱$ و در گراف $k_{p,q}$ با فرض $p < q$، طول بزرگ‌ترین مسیر برابر $۲p$ است، مسیرهای به طول ۲۰ در گراف $k_{۱۰,۱۵}$، حداکثر طول ممکن را دارند. این مسیرها از یکی از رئوس مجموعه ۱۵ رأسی شروع شده و به رأس دیگر از همان مجموعه ختم می‌شوند. کافیست ۱۱ عضو از مجموعه ۱۵ رأسی و ۱۰ عضو از مجموعه ۱۰ رأسی انتخاب کنیم و آن‌ها را یکی در میان در یک صف بچینیم. با توجه به بی‌اهمیت بودن جهت مسیر، پاسخ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و خواهیم داشت:

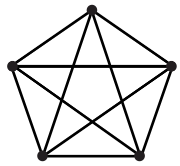
$$\text{تعداد مسیرهای به طول حداکثر} = \binom{۱۵}{۱۱} \times \binom{۱۰}{۱۰} \times ۱۱! \times ۱۰! \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱۵! \times ۱۰!}{۲ \times ۴!}$$

❖ **تعریف گراف r– منتظم (r-regular)** : یک گراف را r– منتظم می‌گوییم، اگر درجه تمام رئوس آن برابر r باشد.

در شکل زیر چند گراف منتظم دیده می‌شود.

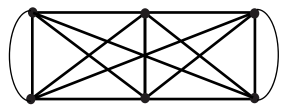


گراف ۴– منتظم از مرتبه ۷

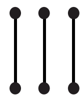


گراف ۴– منتظم از مرتبه ۵

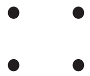
گراف ۲– منتظم از مرتبه ۴



گراف ۵– منتظم از مرتبه ۶



گراف ۱– منتظم از مرتبه ۶



گراف ۰ ـ منتظم از مرتبه ۴

اگر r و p هر دو فرد نباشند، آنگاه حتماً یک گراف r– منتظم از مرتبه p وجود دارد؛ اما اگر r و p هر دو فرد باشند، چنین گرافی وجود نخواهد داشت. به عنوان مثال، هیچ گراف ۳- منتظم از مرتبه ۵ وجود ندارد.

نکته۷: هر گراف کامل از مرتبه n یک گراف $n-1$ منتظم است.

مثال۵۰: فرض کنید G گرافی ۷ـ منتظم و جهت‌دار باشد به طوری که درجه خروجی هر رأس آن ۱ یا ۴ است. اگر a و b به ترتیب تعداد رئوس با خروجی‌های ۱ و ۴ باشند. در این صورت $\frac{b}{a}$ برابر کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» در یک گراف ۷ منتظم میانگین درجه خروجی رئوس برابر $\frac{۷}{۲} = ۳/۵$ است. پس داریم:

$$۱ \times a = ۴ \times b = ۳/۵ \times (a \times b) \Rightarrow ۰/۵b = ۲/۵a \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{۲/۵}{۰/۵} = ۵$$

مثال۵۱: تعداد مسیرهای ۴ رأسی در یک گراف ۳ـ منتظم دو بخشی ۱۰ رأسی برابر کدام است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۴)

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۰۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» احتمالاً طراح سؤال مسیرهایی از رأس u به v و از v به u را یکی در نظر گرفته است.

۱۰ انتخاب برای رأس مبدأ داریم. ۳ انتخاب برای اولین یال که به دومین رأس منتهی می‌شود. ۲ انتخاب برای دومین یال که به سومین رأس منتهی می‌شود و ۲ انتخاب برای سومین یالی که به رأس مقصد منتهی می‌شود. تعداد کل مسیرها برابر ۱۲۰ خواهد بود.

با فرض این‌که مسیرها مستقل از مبدأ و مقصد باشند و مسیر abcd با dcba برابر باشد، جواب برابر $\frac{۱۲۰}{۲} = ۶۰$ می‌شود.

مثال۵۲: کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (ریاضی ـ سراسری ۹۴)

۱) هر گراف ۴ـ منتظم همبند فاقد یال برشی است.

۲) یک گراف با ۵ مؤلفه همبندی که همه مؤلفه‌های آن درخت می‌باشند و ۱۰۰ رأسی است ۹۹ یال دارد.

۳) هر گراف همبند ۳ـ منتظم فاقد یال برشی است.

۴) درختی موجود است که با حذف یک یال از آن سه مؤلفه همبندی پدید آید.

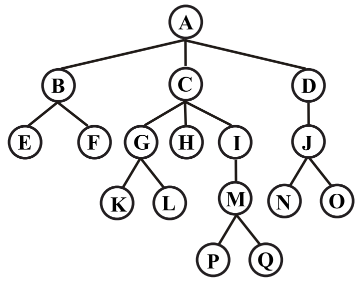
☑ **پاسخ:** گزینه «۱» در یک گراف ۲n منتظم، از هر بخش از گراف تعداد زوج یال به بخش‌های دیگر آن وجود دارد که موجب می‌شود هیچ‌کدام از یال‌ها برشی نباشند. ولی در گراف $۲n+۱$– منتظم ممکن است تعداد فرد یال از یک بخش به سایر بخش‌ها وجود داشته باشد و نیز ممکن است یال برشی باشد؛ مثل درخت دو رأسی. در نتیجه عبارت گزینه (۱) درست و (۳) نادرست است. عبارت گزینه (۲) غلط است. زیرا گراف مذکور ۹۵ یال دارد.

عبارت گزینه (۴) غلط است؛ زیرا حذف یک یال موجب ایجاد ۲ مؤلفه در درخت می‌شود.

❖ **تعریف گراف مکمل (complement graph):** گراف $\bar{G}$ را مکمل G می‌گوییم، در صورتی‌که $V(\bar{G}) = V(G)$ و همچنین در مورد هر یال دلخواه $(v_۱, v_۲)$ داریم $(v_۱, v_۲) \in E(G)$، اگر و تنها اگر $(v_۱, v_۲) \notin E(\bar{G})$.

درسنامه (۲): درختان ریشه‌دار

درختان ریشه‌دار نوع خاصی از درختان با یال‌های جهت‌دار هستند که با توجه به کاربردشان آن‌ها را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. در صورتی که جهت رئوس را حذف کنیم، درخت ریشه‌دار به درخت بدون ریشه (درخت ساده) تبدیل خواهد شد. این درختان رأس (گره) منحصربه‌فردی با عنوان **ریشه (Root)** دارند و جهت تمام یال‌های این درخت در جهت دور شدن از ریشه است. در چنین ساختاری اگر از رأس u به رأس v یال وجود داشته باشد، رأس u را **والد (Parent)** رأس v می‌نامیم. رأس v نیز **فرزند (Child)** رأس u خواهد بود. تنها رأسی که در این ساختار والد ندارد، ریشه است و سایر رئوس دقیقاً یک والد دارند. برای رسم نکردن جهت یال‌ها در درختان ریشه‌دار، ریشه را در بالا رسم می‌کنیم و تمامی فرزندان هر رأس رسم شده را به‌صورت بازگشتی پایین‌تر از والدشان رسم کرده، با یال بدون جهت به آن متصل می‌کنیم.

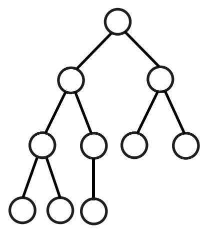


شکل مقابل نمایش یک درخت ریشه‌دار، با ریشه A است. فرزندان رأس A رئوس C،B و D هستند. تمامی فرزندان یک گره **همزاد (Sibling)** یکدیگر محسوب می‌شوند. به عنوان مثال، رئوس H،G و I با توجه به اینکه همگی فرزندان رأس C هستند، همزاد خواهند بود. همانطور که در شکل مشخص است در صورتی که ارتباط یک رأس مفروض با والدش را قطع نماییم، رأس مورد نظر ریشه درخت جداشده خواهد بود. تمامی رئوس این زیر درخت جدا شده (بجز ریشه) **نوادگان (Descendants)** ریشه درخت محسوب می‌شوند و ریشه نیز **جد (Ancestor)** تمام این رئوس خواهد بود. عنوان مثال I و L از نوادگان C هستند و D،A و J اجداد N می‌باشند.

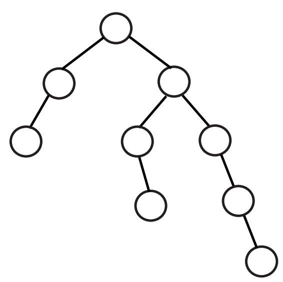
تعداد فرزندان هر رأس را **درجه (Degree)** آن رأس می‌نامیم و حداکثر درجه بین رئوس درخت را درجه آن درخت در نظر می‌گیریم. اگر درجه درخت برابر k باشد، درخت را k تایی **(k-ary)** می‌نامیم. به عنوان مثال، درجه رئوس A و C برابر ۳ و درجه رأس B برابر ۲ است. درجه درخت نیز برابر ۳ خواهد بود. رأسی که درجه‌اش برابر صفر باشد، برگ **(Leaf)** نامیده می‌شود و سایر رئوس درخت رئوس داخلی محسوب می‌شوند. رئوسی مانند H،F و P در درخت فوق برگ هستند. طول بلندترین مسیر از یک رأس به برگ‌ها را **ارتفاع (Height)** آن رأس می‌نامند. این مقدار برای برگ‌ها برابر صفر است. عمق یا ارتفاع درخت نیز برابر ارتفاع ریشه درخت خواهد بود که به عنوان **شعاع(Radius)** درخت معروف است. **قطر(Piameter)** درخت نیز بیانگر حداکثر فاصله بین دو رأس درخت بدون در نظر گرفتن جهت یال‌هاست. در درخت فوق ارتفاع برابر ۴ و قطر برابر ۶ است. **عمق (Depth)** و **سطح (Level)** هر رأس نیز معیاری برای بیان فاصله آن رأس تا ریشه هستند، با این تفاوت که حداقل مقدار عمق برابر صفر و حداقل مقدار سطح برابر ۱ است. این حداقل‌ها برای رأس ریشه در نظر گرفته شده‌اند. به عنوان مثال، عمق گره H برابر ۲ و سطح آن برابر ۳ است. عمق درخت همان ارتفاع درخت خواهد بود.

نکته ۵: اگر r را شعاع یک درخت و d را قطر آن در نظر بگیریم، همواره داریم: $r \le d \le 2r$

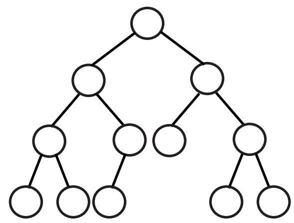
❖ **تعریف درخت کامل (Complete tree):** درختی که تمام سطوح به‌جز سطح آخر آن با توجه به درجه درخت پر باشد و در سطح آخر نیز گره‌ها در منتهی‌الیه سمت چپ قرار گرفته باشند، درخت کامل نامیده می‌شود. نمونه‌ای از یک درخت کامل از درجه ۲ در شکل روبرو نشان داده شده است.



❖ **تعریف درخت متوازن (Balanced tree):** درختی که اختلاف سطح زیردرخت‌های هر گره آن بیشتر از یک نباشد، متوازن است.

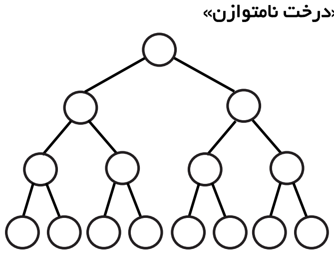


«درخت نامتوازن»

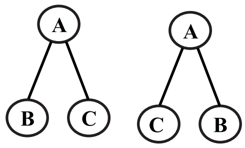


«درخت متوازن»

❖ **تعریف درخت پر (Full tree):** درختی که زیردرخت‌های هر گره آن، هم‌سطح باشند، درخت پر (درخت کاملاً متوازن) نامیده می‌شود. این درخت حالت خاصی از درخت کامل است که در آن تمام برگ‌ها هم‌سطح خواهند بود.



❖ **تعریف درخت مرتب (Ordered tree):** درختی که در آن ترتیب چپ و راست بودن شاخه‌ها مهم باشد، درخت مرتب نامیده می‌شود.
در صورتی که ترتیب شاخه‌ها در درخت‌های مقابل اهمیت نداشته باشد، این دو درخت معادل هم هستند.



نکته ۶: در یک درخت kتایی کامل با n گره تعداد گره‌های برگ برابر $n-\left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil$ و تعداد گره‌های غیربرگ (گره‌های داخلی) برابر $\left\lceil \frac{n-1}{k} \right\rceil$ خواهد بود.

منظور از نماد ⌈ ⌉ تابع سقف می‌باشد که مقدار آن برابر کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از عدد داخل ⌈ ⌉ می‌باشد. مثلاً:
$\lceil ۲/۵ \rceil = ۳ \quad , \quad \lceil -۲/۵ \rceil = -۲$

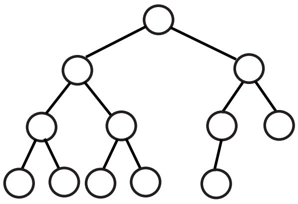
مثال۴۰: یک درخت کامل دودویی (۲ تایی) با ۱۲ گره، چند گره داخلی و چند برگ دارد؟

۱) ۵ و ۷ ۲) ۶ و ۶ ۳) ۷ و ۵ ۴) ۴ و ۸

پاسخ: گزینه «۲» درخت کامل دودویی با ۱۲ گره، به فرم مقابل خواهد بود. تعداد گره‌های داخلی و برگ این درخت برابر است با:

$$\text{تعداد گره‌های داخلی} = \left\lceil \frac{۱۲-۱}{۲} \right\rceil = ۶$$

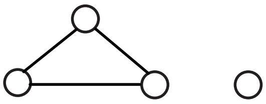
$$\text{تعداد برگ‌ها} = ۱۲ - \left\lceil \frac{۱۲-۱}{۲} \right\rceil = ۶$$



مثال۴۱: کدام گزینه درست است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT)ـ سراسری ۹۲)

۱) هر گراف بدون جهت $G=(V,E)$ که در آن $|V|=|E|+۱$ یک درخت است.
۲) بیشینه تعداد رئوس داخلی یک درخت کامل چهارتایی (quaternary) با ارتفاع ۸ برابر ۲۱۶۴۵ است.
۳) اگر $T=(V,E)$ درختی با $|V|=۱۰$ رأس باشد، دقیقاً ۳۰ مسیر در آن یافت می‌شود.
۴) درخت سه‌تایی (Ternary) کامل $T=(V,E)$ دارای ۳۴ رأس داخلی است. در این صورت تعداد یال‌های آن ۱۰۲ است.

پاسخ: گزینه «۴» گزینه (۱) نادرست است. برای مثال گراف مقابل را در نظر بگیرید.

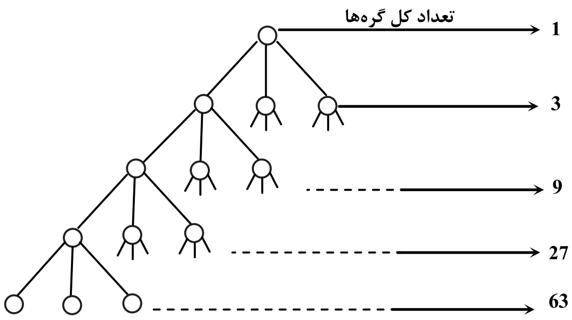


گزینه (۲) نادرست است؛ زیرا تعداد رئوس داخلی در حالت حداکثر برای یک درخت چهارتایی کامل، با ارتفاع ۸ عبارت است از:

$$۱+۴+۴^۲+\ldots+۴^۷ = \frac{۴^۸-۱}{۳} = ۲۱۸۴۵$$

گزینه (۳) نادرست است (تعداد مسیرها در یک درخت با n رأس برابر است با: $\frac{n(n-۱)}{۲} = \binom{n}{۲}$). به ازای $n=۱۰$ به تعداد ۴۵ مسیر داریم.

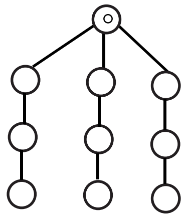
اما گزینه (۴) درست است؛ زیرا این درخت باید دارای ساختار مقابل باشد:
بنابراین ۲۱ عدد از گره‌های سطح ماقبل آخر دارای فرزند می‌باشند و در نتیجه جزء گره‌های داخلی محسوب می‌شوند. در نتیجه تعداد کل رئوس برابر ۱۰۳ و بنابراین تعداد یال‌ها برابر ۱۰۲ می‌باشند.



مثال۴۲: چند درخت ریشه‌دار T با ریشه صفر و مجموعه رئوس $V(T)=\{۰,۱,\ldots,۹\}$ وجود دارد که در آن، ریشه دارای ۳ فرزند و سایر رئوس حداکثر دارای یک فرزند باشند و فاصله ریشه از برگ‌ها یکسان باشد و هر مسیر از ریشه به یک برگ، یک دنباله صعودی از رئوس باشد؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) $۳^۸-۲^۸$ ۲) $\frac{۳^۸+۱}{۲}-۲^۸$ ۳) $\frac{۹!}{(۳!)^۲}$ ۴) $\frac{۹!}{(۳!)^۴}$



☑ **پاسخ:** گزینه «۴» فرم کلی درخت به صورت شکل مقابل می‌باشد. برچسب ∘ برای رأس مشخص شده ثابت است. برای محاسبه تعداد درختان کافی است مجموعه اعداد $\{1,2,\dots,9\}$ را به سه مجموعه ۳ عضوی مشابه افراز نماییم. این افرازها برابر با تعداد این درختان است که برابر با رابطه زیر است:

$$\text{تعداد درختان مطلوب} = \frac{\binom{9}{3}\binom{9}{3}\binom{3}{3}}{3!} = \frac{9!}{(3!)^4}$$

مثال ۴۳: کدام گزینه صحیح <u>نیست</u>؟

۱) تعداد درختان ریشه‌دار دودویی بدون برچسب با n رأس برابر $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ است.

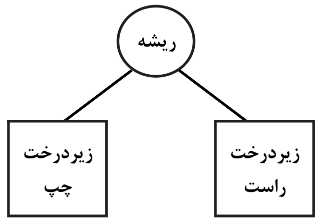
۲) تعداد درختان ریشه‌دار دودویی برچسب‌دار با n رأس برابر $\frac{n!}{n+1}\binom{2n}{n}$ است.

۳) تعداد درختان بدون ریشه (درختان آزاد) بدون برچسب با n رأس برابر $\frac{n!}{\sum_{i=1}^{n} s(n,i)}$ است.

۴) تعداد درختان بدون ریشه (درختان آزاد) برچسب‌دار با n رأس برابر n^{n-2} است.

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» درختان آزاد بدون برچسب فرمول ساده‌ای ندارند.

درخت دودویی (Binary tree)



درخت دودویی درختی است که هر رأس آن حداکثر دو فرزند دارد. شکل کلی آن در مقابل آمده است. هر درخت دودویی شامل ریشه و زیردرخت چپ و زیردرخت راست می‌باشد که این زیردرختان می‌توانند تهی باشند. واضح است که درخت دودویی یک درخت مرتب می‌باشد.

درخت دودویی پرکاربردترین نوع درخت ریشه‌دار محسوب می‌شود. از جمله خواص این درخت می‌توان موارد زیر را نام برد:

۱ـ حداکثر تعداد رأس‌های موجود در عمق iام درخت برابر با 2^i خواهد بود. در نتیجه حداکثر تعداد کل رأس‌های یک درخت دودویی با ارتفاع k (که مربوط به درخت دودویی پر است) برابر است با: $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$

۲ـ حداقل ارتفاع یک درخت دودویی با n رأس برابر است با: $\lfloor \log_2 n \rfloor$.

۳ـ در صورتی که α تعداد رئوس دوفرزندی و β تعداد برگ‌های درخت باشد، رابطه $\beta - \alpha = 1$ همواره برقرار خواهد بود.

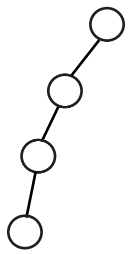
۴ـ تعداد درختان دودویی متمایز بدون در نظر گرفتن برچسبشان با n رأس برابر با عدد nام دنباله اعداد کاتالان یعنی $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ است. نحوه محاسبه‌ی این رابطه در فصل روابط بازگشتی بیان شده است.

مثال ۴۴: حداکثر اختلاف تعداد رئوس داخلی دو درخت دودویی با ارتفاع ۳ برابر است با:

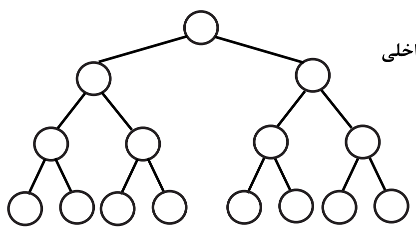
۱) ۱۰　　۲) ۸　　۳) ۵　　۴) ۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» دو درخت دودویی زیر به ارتفاع ۳، کمترین و بیشترین تعداد رئوس داخلی را دارند. اختلاف تعداد رئوس داخلی این دو درخت برابر است با: $7 - 2 = 5$.

2 = رئوس داخلی



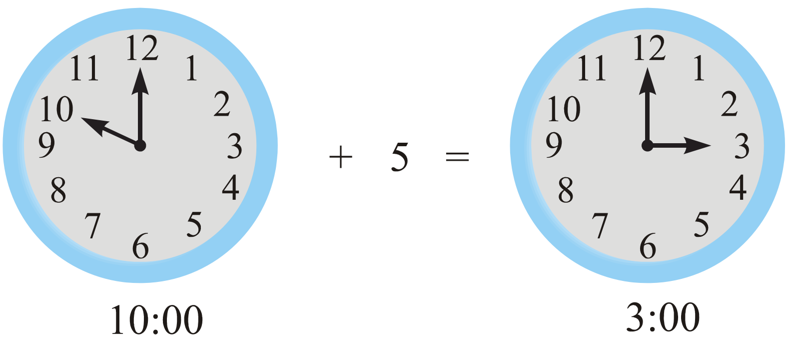
7 = رئوس داخلی



مدرسان شریف

فصل نهم

«نظریه اعداد»



مقدمه

در ریاضیات دوره متوسطه با نظریه اعداد آشنا شدیم. هدف از مطالعه این فصل، بررسی خواص اعداد صحیح است. گاه این خواص بسیار ابتدایی و پیش‌پاافتاده به نظر می‌رسد؛ با وجود این نیازمند استدلال و منطق قوی برای استفاده در یک مسأله پیچیده می‌باشد. در این فصل به معرفی و کاربرد این خواص و نحوه استفاده از آن‌ها در پاسخگویی به مسائلی می‌پردازیم که حل آن‌ها با فرمول‌های ترکیبیاتی دشوار به نظر می‌رسد.

درسنامه (۱): بخش‌پذیری (Divisibility)

با فرض اینکه m و n اعداد صحیح باشند $(n \neq 0)$، حاصل تقسیم m بر n یعنی $a = \frac{m}{n}$ می‌تواند یک عدد صحیح باشد یا نباشد. در صورتی که a یک عدد صحیح باشد، می‌توان گفت عدد m بر n بخش‌پذیر است. به عبارت دیگر، عدد m بر n با فرض $n \neq 0$ بخش‌پذیر خواهد بود، اگر و تنها اگر عدد صحیحی مانند a وجود داشته باشد، به شرطی که $m = an$، به عدد m مقسوم (dividend) و به عدد n مقسوم‌علیه (divisor) گفته می‌شود. در صورتی که m بر n بخش‌پذیر باشد، می‌توان نوشت $n|m$ که خوانده می‌شود عدد n عدد m را عاد می‌کند یا می‌شمارد. در غیر این صورت می‌توان نوشت $n \nmid m$ که خوانده می‌شود عدد n عدد m را عاد نمی‌کند یا نمی‌شمارد.

به عنوان مثال، عدد ۱۲ بر اعداد ۱، ۳، ۴-، ۱۲ و ۱۲- بخش‌پذیر است و بر اعداد ۵، ۷ و ۱۱- بخش‌پذیر نیست.

نکته ۱: در صورتی که داشته باشیم $n|m$ و $n|p$ و با فرض اینکه a و b اعداد صحیح باشند، خواهیم داشت:

$-n \mid -m$	$-n \mid m$	$n \mid -m$
$n \mid am+bp$	$n \mid am+bn$	$an \mid am$

رابطه بخش‌پذیری در اعداد صحیح خاصیت بازتابی و تعدی دارد؛ ولی خاصیت تقارنی و پادتقارنی ندارد. دلیل نداشتن رابطه پادتقارنی صحیح بودن عبارت $m \mid -m$ است.

نکته ۲: رابطه بخش‌پذیری در اعداد طبیعی و روی اعداد صحیح منفی خاصیت پادتقارنی خواهد داشت. اضافه شدن عضو ۰ به این دو مجموعه، خاصیت‌های بازتابی، پادتقارنی و تعدی را نقض نخواهد کرد.

نکته ۳: در صورتی که داشته باشیم $an|am$ و m و n اعداد صحیح باشند، آنگاه خواهیم داشت $n|m$.

❖ **تعریف باقی‌مانده:** برای هر دو عدد صحیح m و عدد طبیعی n اعداد صحیح یکتای b و a وجود دارند، به طوری که:

$$m = an + b \qquad \text{و} \qquad 0 \le b < n$$

در این صورت b را باقی‌مانده (Remainder) تقسیم m بر n می‌نامیم؛ که جزء صحیح تقسیم m بـر n اسـت، یعنـی $a = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$ کـه آن را خـارج قسمت (Quotient) تقسیم m بر n می‌نامیم. در صورتی که $b = 0$ باشد، آنگاه داریم $n|m$.

❖ **تعریف عدد اول:** هر عدد طبیعی که غیر از ۱ و خودش بر هیچ عدد طبیعـی دیگـری بخـش‌پـذیر نیسـت، عـدد اول**(Prime number)** نامیـده می‌شود. اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ که اول نیستند مرکب خوانده می‌شوند. مجموعه زیر تعدادی از اعداد اول را نشان می‌دهد.

$$P = \{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۱,...\}$$

از جمله خصوصیت‌های اول می‌توان موارد زیر را نام برد:

۱ـ مجموعه اعداد اول نامتناهی است.

۲ـ هر عدد مرکب n حداقل یک مقسوم‌علیه اول کوچکتر مساوی $\sqrt{n}$ دارد.

۳ـ هر عدد طبیعی n را به یک فرم یکتا می‌توان به صورت $n = p_1^{a_1}\ p_2^{a_2}\ p_3^{a_3} \cdots$ نوشت، به طوری که a_iها اعداد صحیح نامنفی و p_i هـا اعـداد اول هستند. بدیهی است که برای اعداد اول p_k بزرگتر از n، مقدار a_k برابر صفر می‌باشد. به عنوان مثال، $۱۲ = ۲^۲ \times ۳^۱$، $۱۲۵ = ۵^۳$ و $۲۳ = ۲۳^۱$.

طبق خاصیت اعداد اول برای هر عدد طبیعی ... $m = p_1^{a_1}\ p_2^{a_2}\ p_3^{a_3}$ (که p_iها اعداد اول هستند) به تعداد ...$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)$ مقسوم‌علیه طبیعی وجود دارد. به عنوان مثـال، عـدد $۹۸ = ۲^۱ \times ۷^۲$ بـه تعـداد $۶ = (۱+۱)(۲+۱)$ مقسـوم‌علیـه طبیعـی دارد کـه ایـن اعـداد، اعضـای مجموعـه $\{۱,۲,۷,۱۴,۴۹,۹۸\}$ هستند. در صورتی که برای عدد طبیعـی ... $n = p_1^{b_1} p_2^{b_2} p_3^{b_3}$ بـه ازای همـه iهـا رابطـه $a_i \ge b_i$ برقـرار باشـد، عـدد m بـر n بخش‌پذیر خواهد بود و می‌توان نوشت $n | m$.

❖ **تعریف بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (Greatest common divisor):** برای هر دو عدد صحیح n و m بزرگترین عدد صحیح که بر ایـن دو عدد بخش‌پذیر باشد ب.م.م یا gcd این دو عدد نامیده می‌شـود. فـرض مـی‌کنـیم اعـداد n و m غیرصـفر باشـند. در نظـر مـی‌گیـریم $m' = |m|$ و $n' = |n|$ که m' و n' اعداد طبیعی خواهند بود (در صورتی‌که یکی از دو عدد n و m برابر ۰ باشد، ب.م.م ایـن دو عـدد برابـر قـدرمطلق عـدد دیگـر خواهد شد). طبق خاصیت اعداد اول برای اعداد طبیعی خواهیم داشت:

$$m' = p_1^{a_1}\ p_2^{a_2}\ p_3^{a_3} \ldots \qquad n' = p_1^{b_1}\ p_2^{b_2}\ p_3^{b_3} \ldots$$

$$\Rightarrow \gcd(m',n') = \gcd(m,n) = p_1^{\min(a_1,b_1)}\ p_2^{\min(a_2,b_2)}\ p_3^{\min(a_3,b_3)}$$

برای مثال داریم:

$$\gcd(۲۱,۴۹) = ۷ \qquad \gcd(-۱۵,-۳) = ۳ \qquad \gcd(۱۲,۳۶) = ۱۲$$

نکته ۴: در صورتی که ب.م.م دو عدد برابر ۱ شود، اصطلاحاً می‌گوییم دو عدد نسبت به هم اول‌اند. مثلاً اعداد ۶۴ و ۹۹ نسبت به هم اول‌اند.

❖ **تعریف کوچکترین مضرب مشترک (Least common multiple):** کوچکترین عدد صحیح نامنفی که هـر دو عـدد صـحیح n و m بـر آن بخش‌پذیر باشند، ک.م.م یا lcm آن دو عدد نامیده می‌شود. به عبارت دیگر، برای اعداد صحیح غیرصفر n و m داریم:

$$|m| = p_1^{a_1}\ p_2^{a_2}\ p_3^{a_3} \ldots \qquad |n| = p_1^{b_1}\ p_2^{b_2}\ p_3^{b_3} \ldots$$

$$\Rightarrow \mathrm{lcm}(m,n) = p_1^{\max(a_1,b_1)}\ p_2^{\max(a_2,b_2)}\ p_3^{\max(a_3,b_3)} \ldots$$

در صورتی که یکی از مقادیر n و m برابر ۰ باشد، ک.م.م آن‌ها برابر ۰ خواهد شد.

نکته ۵: رابطه ب.م.م و ک.م.م به این صورت است:

$$|m \times n| = \gcd(m,n) \times \mathrm{lcm}(m,n)$$

برای مثال داریم:

$$\mathrm{lcm}(۴,۶) = ۱۲ = \frac{۴ \times ۶}{\gcd(۴,۶)} \qquad \mathrm{lcm}(۷,۴۹) = ۴۹ = \frac{۷ \times ۴۹}{\gcd(۷,۴۹)}$$

تذکر: گاه برای نمایش ب.م.م دو عدد b و a از نماد (a,b) و برای نمایش ک.م.م آن‌ها از نماد $[a,b]$ استفاده می‌کنند. به دلیل تشابه این نمادها با نمادهای بازه مجموعه‌ها و زوج مرتب، در این کتاب از این نمادها برای ب.م.م و ک.م.م استفاده نشده است.

مثال ۱: تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۴۲۰ را بیابید.

۱) ۳۲ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۴» عدد طبیعی ۴۲۰ را باید به صورت حاصل‌ضرب چند عامل اول بنویسیم. خواهیم داشت $۴۲۰ = ۲^۲ \times ۳^۱ \times ۵^۱ \times ۷^۱$؛ در نتیجه تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۴۲۰ برابر حاصل‌ضرب توان‌های به‌علاوه ۱ عامل‌های اول این عدد خواهد بود:

$$\text{پاسخ} = (۲+۱)(۱+۱)(۱+۱)(۱+۱) = ۳ \times ۲^۳ = ۲۴$$

مثال ۲: تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد ۵۰۴ را بیابید.

۱) ۴۸ ۲) ۱۶ ۳) ۴۲ ۴) ۲۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۱» داریم:

$$۵۰۴ = ۷^۱ \times ۳^۲ \times ۲^۳$$

در نتیجه تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۵۰۴ برابر $۲۴ = ۴ \times ۳ \times ۲$ خواهد بود. مقسوم‌علیه‌های صحیح این عدد نیز از ضرب ± ۱ در مقسوم‌علیه‌های طبیعی این عدد بدست می‌آیند و تعدادشان ۲ برابر تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی یعنی ۴۸ می‌باشد.

مثال ۳: چند مقسوم‌علیه طبیعی عدد ۷۲۰۰ مضرب ۱۸ هستند؟

۱) ۳ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۵۴

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» خواهیم داشت $۷۲۰۰ = ۵^۲ \times ۳^۲ \times ۲^۵$ و $۱۸ = ۳^۲ \times ۲^۱$. مطابق مثال قبل برای عدد $a = ۵^{k_1} \times ۳^{k_2} \times ۲^{k_3}$ خواهیم داشت:

سه حالت $۰ \le k_1 \le ۲$ پنج حالت $۱ \le k_3 \le ۵$ یک حالت $۲ \le k_2 \le ۲$

تعداد کل حالات برابر است با $۱۵ = ۵ \times ۱ \times ۳$ حالت.

مثال ۴: با توجه به دو گزاره‌ی زیر، کدام گزینه صحیح است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۹۶)

الف) به ازای هر عدد طبیعی n و n عدد طبیعی متوالی وجود دارند که هیچ یک اول نیستند.

ب) اگر n یک عدد طبیعی و a و b دو عدد همنهشت به پیمانه‌ی n باشند، آن‌گاه به ازای هر عدد طبیعی c، c^a و c^b به پیمانه‌ی n همنهشت‌اند.

۱) (الف) درست، (ب) درست ۲) (الف) نادرست، (ب) درست ۳) (الف) درست، (ب) نادرست ۴) (الف) نادرست، (ب) نادرست

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اگر c عددی طبیعی کوچکترمساوی k باشد، عدد $m = c + k!$ را می‌توان به صورت $m = c\left(۱ + \frac{k!}{c}\right)$ نوشت و با توجه به اینکه عدد $k!$ دارای عامل c است و با فرض اینکه c بزرگتر از ۱ است، عدد m نمی‌تواند اول باشد. با فرض $k > n$ می‌توان $k-۱$ عدد صحیح به شکل $m = c + k!$ به ازای $۲ \le c \le k-۱$ تعریف نمود. در نتیجه عبارت «الف» صحیح است. برای عبارت «ب» می‌توان از مثال نقض $n = ۳$ ، $a = ۱$ ، $b = ۴$ و $c = ۲$ استفاده نمود. اعداد $۲^۱$ و $۲^۴$ به پیمانه ۳ همنهشت نیستند. در نتیجه عبارت «ب» نادرست است.

مثال ۵: به‌ازای چند عدد طبیعی n، عدد $[\frac{n^2}{۳}]$ اول است؟ (مهندسی کامپیوتر ـ سراسری ۹۶)

۱) صفر ۲) یک ۳) تعداد متناهی بیش از یک ۴) بی‌نهایت

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» اعداد طبیعی مانند n را می‌توان به یکی از سه شکل ۳k و ۳k+۱ و ۳k+۲ و ... نوشت. با قرار دادن هر عدد در رابطه $\left\lfloor \frac{n^2}{۳} \right\rfloor$ به یکی از اعداد زیر خواهیم رسید:

$$n = ۳k \Rightarrow \left\lfloor \frac{n^2}{۳} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(۳k)^2}{۳} \right\rfloor = ۳k^2$$

$$n = ۳k+۱ \Rightarrow \left\lfloor \frac{n^2}{۳} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(۳k+۱)^2}{۳} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{۹k^2+۶k+۱}{۳} \right\rfloor = ۳k^2 + ۲k = k(۳k+۲)$$

$$n = ۳k+۲ \Rightarrow \left\lfloor \frac{n^2}{۳} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(۳k+۲)^2}{۳} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{۹k^2+۱۲k+۴}{۳} \right\rfloor = ۳k^2 + ۴k + ۱ = (۳k+۱)(k+۱)$$

با توجه به اینکه هر یک از سه حالت فوق دارای حداقل یک عامل بزرگتر مساوی با k است، تنها در صورتی که مقدار k برابر ۰ یا ۱ باشد، این اعداد می‌توانند اول باشند؛ زیرا در غیر این صورت این اعداد حداقل ۲ عامل طبیعی بزرگتر از ۱ دارند. در رابطه اول به ازای $k=1$ به عدد اول ۳ می‌رسیم. در رابطه دوم به ازای $k=1$ به عدد طبیعی ۵ می‌رسیم. حالت $n=3k+2$ نیز تنها به ازای $k=0$ می‌تواند عددی طبیعی را نمایش دهد که در این حالت مقدار رابطه برابر ۱ خواهد بود که یک عدد اول نیست. در نتیجه تنها دو عدد اول را می‌توان به‌صورت $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$ نوشت.

مثال ۶: چه تعداد دنبالهٔ متناهی به صورت a_1، a_2، a_3، a_4، a_5، a_6 از اعداد صحیح مثبت (نه الزاماً متمایز) وجود دارد به طوری که $a_1=1$، $a_6=2000$ و به ازای هر $2\le n\le 6$، جملهٔ a_n بر a_{n-1} بخش‌پذیر است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۴)

۱) ۷۵ ۲) ۲۳۷۵ ۳) ۲۴۵۰ ۴) ۳۶۵۰

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» می‌دانیم $a_6=2000=2^4\times5^3$. در نتیجه اعداد a_i $(2\le i\le 5)$ فقط عامل ۲ و ۵ دارند. فرض کنید $a_i=2^{\sum_{j=2}^{i}x_j}\times5^{\sum_{j=2}^{i}y_j}$ در نتیجه دنباله a_i به صورت صعودی و بخش‌پذیر متوالی خواهد شد، اگر داشته باشیم:

$$\begin{cases}x_2+x_3+x_4+x_5\le 4\\ y_2+y_3+y_4+y_5\le 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2+x_3+x_4+x_5+u=4\\ y_2+y_3+y_4+y_5+v=3\end{cases}$$

که u و v متغیرهای کمکی و مقادیر x_i و y_i اعداد صحیح مثبت هستند. جواب مسأله برابر حاصل‌ضرب تعداد y_i و x_i های مجاز است؛ یعنی:

$$\binom{7}{4}\times\binom{8}{4}=2450$$

مثال ۷: فرض کنید S یک زیرمجموعه $n+1$ عضوی از مجموعه $\{1,\dots,2n\}$ باشد. کدام مورد <u>نادرست</u> است؟

(در زیر علامت | ، علامت بخش‌پذیری و gcd عملگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک است.) (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۹۷)

۱) $\exists a,b\in S: a\mid b$ ۲) $\exists a\in S: 3\mid a$ ۳) $\exists a\in S: 2\mid a$ ۴) $\exists a,b\in S: \gcd(a,b)=1$

☑ **پاسخ:** گزینه «۲» عبارت گزینه ۲ نادرست است. دوسوم از اعداد این مجموعه مضرب ۳ نیستند. کافی است تمام $n+1$ عضو انتخاب شده از مجموعه $2n$ عضوی، اعدادی باشند که مضرب ۳ نیستند. برای مثال از مجموعه اعداد $\{1,2,3,4,5,6\}$ می‌توان زیرمجموعه $\{1,2,4,5\}$ را انتخاب نمود. هیچ عضوی از این زیرمجموعه، مضرب ۳ نیست. ولی تعداد اعداد زوج این مجموعه $2n$ عضوی برابر n است و در زیرمجموعه $n+1$ عضوی حداقل یک عضو زوج وجود خواهد داشت. برای اثبات صحت عبارت گزینه چهارم، مقدار gcd هردو عدد متوالی برابر ۱ است. اگر $n+1$ عدد از مجموعه اعداد ۱ تا $2n$ انتخاب نماییم، حداقل دو عدد وجود دارند که متوالی باشند. در اثبات صحت گزینه اول می‌توان از استدلال استقرایی استفاده نمود. به ازای $n=1$ نمی‌توان مجموعه‌ای شامل $n+1$ عدد انتخاب نمود که هیچ دو عضوی، رابطه $a\mid b$ را نداشته باشند. فرض می‌کنیم به ازای $n=k$ نیز نمی‌توان $n+1$ عضو از مجموعه $2n$ عضوی با شرایط مذکور انتخاب نمود. می‌خواهیم اثبات کنیم این شرایط به ازای $n=k+1$ نیز برقرار است. اگر به ازای $n=k$ نتوان $n+1$ عضو با شرط مذکور انتخاب نمود، حداکثر می‌توانیم n عضو انتخاب نمائیم که هیچ دو عضوی رابطه $a\mid b$ را نداشته باشند. در نتیجه، دو عضو $2k+1$ و $2k+2$ می‌بایست در زیرمجموعه $k+2$ عضوی از مجموعه $2k+2$ عضوی حضور داشته باشند. (مسأله به ازای $n=k+1$) انتخاب عضو $2k+2$ مجاز نیست و قادر به انتخاب زیرمجموعه مطلوب نیستیم. زیرا اگر عضو $k+1$ انتخاب شده باشد، $2k+2$ عضو $k+1$ را عاد می‌کند و رابطه برقرار نیست. اگر عضو $k+1$ انتخاب نشده باشد، یعنی عضو دیگری در مجموعه قرار دارد که $k+1$ را عاد می‌کند که $2k+2$ را نیز عاد خواهد کرد. زیرا در غیر این صورت، عضو $k=1$ نیز در زیرمجموعه قرار می‌گرفت و می‌توانستیم زیرمجموعه $k+1$ عضوی از مجموعه $2k$ عضوی با شرط مسأله انتخاب نماییم.

مثال ۸: چند عدد چهاررقمی به صورت $\overline{2xy4}$ وجود دارد که بر ۷۲ بخش‌پذیر است؟ (مهندسی فناوری اطلاعات (IT) ـ سراسری ۹۴)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

☑ **پاسخ:** گزینه «۳» عددی که بر ۷۲ بخش‌پذیر است بر $2^3=8$ و $3^2=9$ بخش‌پذیر است. در نتیجه عدد $\overline{2xy4}$ بر ۷۲ بخش‌پذیر است در صورتی که:

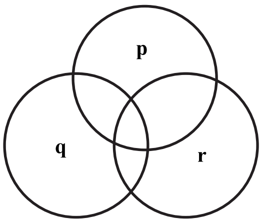
$$\begin{cases}2+x+y+4=9p\\ 4x+2y+4=8q\end{cases}$$

می‌بایست اعدادی که در ۲ رابطه فوق صدق می‌کنند را بیابیم. مقادیر $\overline{xy}$ که در رابطه اول صدق می‌کنند از مجموعه $\{30,21,12,03,39,48,57,66,75,84,93\}$ هستند که فقط اعداد $\{30,66\}$ در مجموعه دوم قابل قبول‌اند. یعنی اعداد ۲۶۶۴ و ۲۳۰۴ بر ۷۲ بخش‌پذیرند.

مثال۹: چه تعداد از اعضای مجموعهٔ $A=\{1,2,\dots,3000\}$ دقیقاً بر یکی از اعداد ۲، ۳ یا ۵ بخش‌پذیر هستند؟ (علوم کامپیوتر ـ دکتری ۹۳)

۱) ۸۰۰ ۲) ۱۲۰۰ ۳) ۱۴۰۰ ۴) ۲۲۰۰

پاسخ: گزینه «۳» اگر p را بخش‌پذیری بر ۲، q را بخش‌پذیری بر ۳ و r را بخش‌پذیری بر ۵ در نظر بگیریم، با توجه به نمودار ون زیر، جواب مسأله برابر خواهد بود با:



$$\text{جواب}=n(p)+n(q)+n(r)-2n(pq)-2n(pr)-2n(qr)+3n(pqr)$$

$$=[\frac{3000}{2}]+[\frac{3000}{3}]+[\frac{3000}{5}]-2[\frac{3000}{6}]-2[\frac{3000}{10}]-2[\frac{3000}{15}]+3[\frac{3000}{30}]=1400$$

مثال۱۰: تعداد شمارنده‌های مثبت $N=2^3 5^4 7^3 11^7$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۰)

۱) ۱۶۸ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۶۴۰

پاسخ: گزینه «۴» اگر بتوان عدد N را به صورت $N=a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_k^{b_k}$ نوشت به طوری که a_i ها به ازای $1\le i\le k$ اعداد اول باشند، تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی (شمارنده‌های مثبت) عدد N از رابطه $(b_1+1)(b_2+1)\dots(b_k+1)$ محاسبه می‌شود. در نتیجه خواهیم داشت:

تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد N = $(3+1)\times(4+1)\times(3+1)\times(7+1)=640$

مثال۱۱: فرض کنید G گرافی ۳۴ رأس باشد که رئوس آن با ۳۴،...،۲،۱ شماره‌گذاری شده‌اند و دو رأس a و b به هم وصل‌اند، اگر و تنها اگر $\gcd(a-b,34)=1$ (بزرگترین مقسوم علیه مشترک). تعداد مثلث‌های گراف G کدام است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۲)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه «۱» اگر بین دو رأس دلخواه (a,b) یال وجود داشته باشد، بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که a زوج و b فرد است. حال اگر یال (b,c) نیز در گراف وجود داشته باشد، آنگاه باید c زوج باشد؛ بنابراین برای وجود مثلث باید یک یال از c به a وجود داشته باشد. اما $\gcd(a,b)\ge 2$؛ بنابراین هیچ مثلثی در این گراف موجود نیست. این گراف یک گراف دوبخشی است.

مثال۱۲: اعداد مجموعه $\{1,2,\dots,n\}$ را با دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرده‌ایم به‌طوری که تفاضل هر دو عدد سیاه، سفید است و تفاضل هر دو عدد سفید، سیاه است. حداکثر n چقدر است؟ (علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۷)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) n هر عددی می‌تواند باشد.

پاسخ: گزینه «۲» به ازای $n=4$ درنظر بگیرید که اعداد ۴ و ۱ سفید و اعداد ۲ و ۳ سیاه باشند. برای $n=5$ این کار ممکن نیست.

مثال۱۳: a و b دو رقم متمایز هستند به‌طوری که برای هر $n\in\mathbb{N}$، مضربی طبیعی از n با ارقام a و b وجود دارد. a و b به ترتیب کدام است؟

(علوم کامپیوتر ـ سراسری ۹۷)

۱) ۱، ۲ ۲) ۱، ۵ ۳) ۳، ۵ ۴) ۰، ۷

پاسخ: گزینه «۴» مضارب طبیعی ۵ نمی‌توانند با ارقام ۱ و ۲ ساخته شوند. مضارب طبیعی ۲ نیز نمی‌توانند با ارقام ۱، ۳ و ۵ ساخته شوند. ولی با ارقام ۰ و ۷ می‌توان مضارب طبیعی هر عددی را تولید نمود.