کد کنترل

861

A

861A

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

عصر پنجشنبه
۱۳۹۸/۳/۲۳

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی‌ارشد ناپیوستهٔ داخل ـ سال ۱۳۹۸

مجموعه علوم کامپیوتر ـ کد (۱۲۰۹)

تعداد سؤال: ۱۳۵ | مدت پاسخ‌گویی: ۲۴۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شمارهٔ سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شمارهٔ	تا شمارهٔ
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی(۱و۲)، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۳۵	۳۱	۶۵
۳	ساختمان داده‌ها، طراحی الگوریتم‌ها و مبانی نظریه محاسبه	۳۰	۶۶	۹۵
۴	مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها	۲۰	۹۶	۱۱۵
۵	ریاضیات گسسته و مبانی ترکیبیات	۲۰	۱۱۶	۱۳۵

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به‌منزلهٔ عدم حضور شما در جلسهٔ آزمون است.

اینجانب ..... با شمارهٔ داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان‌بودن شمارهٔ صندلی خود را با شمارهٔ داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچهٔ سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچهٔ سؤالات و پائین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی) :

PART A: Vocabulary

***Directions**: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.*

1- Some vegetarians are not just indifferent to meat; they have a/an ---------- toward it.
1) immorality 2) tendency 3) antipathy 4) commitment

2- A recent study shows that the prevalence and sometimes misuse of cell phones and computers has led to a/an ---------- in some people about the benefits of technology.
1) ambivalence 2) distinction 3) encouragement 4) compromise

3- My niece has a ---------- imagination. She can turn a tree and a stick into a castle and a wand and spend hours in her fairy kingdom.
1) vacuous 2) vivid 3) cyclical 4) careless

4- The singer's mellifluous voice kept the audience ---------- for two hours.
1) disputed 2) disregarded 3) frustrated 4) enchanted

5- His family, relatives, and friends still cling to the hope that Jeff will someday ---------- himself from the destructive hole he now finds himself in.
1) evade 2) prevent 3) deprive 4) extricate

6- Logan has been working long hours, but that is no excuse for him to be ---------- to customers.
1) ingenious 2) intimate 3) discourteous 4) redundant

7- Although he was found ----------, he continued to assert that he was innocent and had been falsely indicted.
1) critical 2) guilty 3) problematic 4) gloomy

8- The old sailor's skin had become wrinkled and ---------- from years of being out in the sun and the wind.
1) desiccated 2) emerged 3) intensified 4) exposed

9- The promoters conducted a survey to study the ---------- of the project before investing their money in it.
1) impression 2) visibility 3) feasibility 4) preparation

10- That is too ---------- an explanation for this strange phenomenon—I am sure there's something more complex at work.

1) simplistic 2) lengthy 3) profound 4) initial

PART B: Cloze Test

***Directions*: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.**

Some researchers investigated the effect of listening to music by Mozart (11) ---------- spatial reasoning, and the results were published in *Nature*. They gave research participants one of three standard tests of abstract spatial reasoning (12) ---------- each of three listening conditions: the Sonata for Two Pianos in D major, K. 448 by Mozart, verbal relaxation instructions, and (13) ----------. They found a temporary enhancement of spatial-reasoning, (14) ---------- spatial-reasoning subtasks of the Stanford-Binet IQ test. Rauscher et al. show that (15) ---------- the music condition is only temporary.

11- 1) in 2) for 3) of 4) on

12- 1) having experienced
2) after they had experienced
3) to be experiencing
4) to experience

13- 1) silence 2) was silent 3) there was silent 4) of silence

14- 1) then measured
2) that was measured
3) as measured by
4) to be measuring

15- 1) the effect of the enhancement of
2) the enhancing effect of
3) enhances the effect of
4) is enhanced by

PART C: Reading Comprehension

***Directions*: Read the following three passages and answer each question by marking the best choice (1), (2), (3) or (4) on your answer sheet.**

PASSAGE 1:

Perhaps the richest and most exciting area of application of the projection theorem is the area of statistical estimation. It appears in virtually all branches of science, engineering, and social science for the analysis of experimental data, for control of systems subject to random disturbances, or for decision making based on incomplete information.

All estimation problems discussed in this chapter are ultimately formulated as equivalent minimum norm problems in Hilbert space and are resolved by an appropriate application of the projection theorem. This approach has several practical

advantages but limits our estimation criteria to various forms of least squares. At the outset, however, it should be pointed out that there are a number of different least squares estimation procedures which as a group offer broad flexibility in problem formulation. The differences lie primarily in the choice of optimality criterion and in the statistical assumptions required.

Least squares is, of course, only one of several established approaches to estimation theory, the main alternatives being maximum likelihood and Bayesian techniques. These other techniques usually require a complete statistical description of the problem variables in terms of joint probability distribution functions, whereas least squares requires only means, variances, and covariances. Although a thorough study of estimation theory would certainly include other approaches as well as least squares, we limit our discussion to those techniques that are derived as applications of the projection theorem. In complicated, multivariable problems the equations resulting from the other approaches are often nonlinear, difficult to solve, and impractical to implement. It is only when all variables have Gaussian statistics that these techniques produce linear equations, in which case the estimate is identical with that obtained by least squares. In many practical situations then, the analyst is forced by the complexity of the problem to either assume Gaussian statistics or to employ a least-squares approach. Since the resulting estimates are identical, which is used is primarily a matter of taste.

16- The projection theorem ----------.

1) is applicable only when the available data is complete
2) serves as a virtual tool to solve scientific problems
3) is used when random disturbance of experimental data is used
4) is used to make decision when the available information may not be complete

17- Estimation theory ----------.

1) provides an alternative approach to solve the maximum likelihood problem
2) can only be addressed by a least squares formulation
3) can be addressed by techniques using joint probability distribution functions
4) provides a useful tool for evaluating the effectiveness of maximum likelihood and Bayesian techniques

18- The choice of optimality criterion and the used statistical assumptions ----------.

1) are irrelevant to the least squares model
2) may cause the projection theorem to be ineffective
3) leads to a particular least squares estimation
4) may make the least squares approach to be inappropriate

19- The estimate by various approaches is identical if ----------.

1) the problem is not multivariable
2) joint probability distributions are not used
3) all the variables have Gaussian statistics
4) a complete statistical distribution of the problem variables is used

20- The minimum norm problem in a Hilbert space as an estimation problem ----------.

1) may be addressed by several alternative approaches
2) can only be resolved by a least squares approach
3) is a hard problem to solve due to inappropriateness of the projection theorem
4) is solved by a direct application of the projection theorem

PASSAGE 2:

In comparison with facsimile, which has become very popular in recent years, electronic mail is more economical, has the flexibility advantages above, and is in principle more convenient for data already stored in a computer. Facsimile is far more convenient for data in hard-copy form (since the hard copy is fed directly into the facsimile machine). It appears clear, however, that the recent popularity of facsimile is due to the fact that it is relatively hassle-free, especially for the occasional or uninitiated user. Unfortunately, electronic mail, and more generally computer communication, despite all the cant about user friendliness, is full of hassles and pitfalls for the occasional or uninitiated user.

There is a similar comparison of electronic mail with voice telephone service. Voice service, in conjunction with an answering machine or voice mail service, in principle has most of the flexibility of electronic mail except for the ability to print a permanent record of a message. Voice, of course, has the additional advantage of immediate two-way interaction and of nonlinguistic communication via inflection and tone. Voice communication is more expensive, but requires only a telephone rather than a telephone plus computer.

As a final application, one might want to use a remote computer system for some computational task. This could happen as a means of load sharing if the local computer is overutilized. It could also arise if there is no local computer, if the local computer is inoperational, or the remote computer is better suited to the given task. Important special cases of the latter are very large problems that require supercomputers. These problems frequently require massive amounts of communication, particularly when the output is in high resolution graphic form. Present-day networks, with their limited link speeds, are often inadequate for these tasks. There are also "real-time" computational tasks in which the computer system must respond to inputs within some maximum delay. If such a task is too large for the local computer, it might be handled by a remote supercomputer or by a number of remote computers working together. Present-day networks are also often inadequate for the communication needs of these tasks.

21- The popularity of facsimile is due to its ----------.

1) inexpensiveness
2) communication speed
3) general purposefulness
4) convenience of use by beginners

22- Electronic mail ---------- voice telephone service.

1) has the same cost as
2) is less expensive than
3) is more expensive than
4) is not comparable to

23- The word "occasional" in paragraph 1 is similar in meaning to ----------.

1) infrequent
2) unprofessional
3) articulate
4) learned

24- Remote computer systems ----------.

1) are not needed for load sharing tasks
2) are needed only for processing high resolution graphic outputs
3) have produced a number of unnecessary complications
4) are needed as a supplement to local computer systems to handle some possible inadequacies

25- For tasks in which a response to the input is required within a limited time, ----------.

1) remote processing may not be helpful
2) a local computer may turn to be inadequate
3) present-day networks make use of high-speed links
4) remote processing may be used appropriately

PASSAGE 3:

Solving an IEP can generally be regarded as solving a nonlinear algebraic system. It is not surprising that many existing computational techniques can be applied to solve an IEP. However, because IEPs also involve matrices, there are more matrix structures and properties that can be and should be exploited. We have found from the literature that current numerical procedures for solving IEPs can roughly be classified into three categories. These are:

1. direct approach,
2. iterative approach,
3. continuous approach.

Thus far, we know of no superlative method, whose performance is clearly superior to all others. Rather, it is often the case that a certain method should be specifically tailored to fit a certain problem.

Direct approach. By a direct method, we mean a procedure through which a solution to an IEP can be found in finitely many arithmetic operations. It might be surprising that, for nonlinear systems such as IEPs, such a method could ever exist. However, most IEPs with Jacobi structure can be solved by the Lanczos method that terminates in finitely many steps. The paper by Boley and Golub (1987) offers a good survey of this method.

In fact, it is also the primary concern in the paper by Ikramov and Chugunov (2000) who search for upper bounds on the number of prescribed entries so that a matrix with these prescribed entries and a prescribed spectrum could be completed by finite rational methods. By a rational method, we refer to any procedure that uses only arithmetic operations of the field over which the problem is considered. As such, a rational algorithm can employ exact arithmetic, say, using the computer algebra

package MAPLE, to complete the construction of a matrix. At present, the bound on the maximal allowable number of prescribed entries in such a PEIEP appears to have been set by the Hershkowitz theorem (Hershkowitz, 1978), beyond which no existence theory is available and no direct method is known to work. However, this lack of an existence theory does not mean that no other numerical methods can be employed to find a solution.

Many classical results in matrix theory proved by mathematical induction may be regarded as constructible by a direct method. With advance in today's programming languages that allow a subprogram to invoke itself recursively, traditional induction proof can be transformed into a recursive algorithm which terminates in finitely many steps.

26- The word "tailored" in paragraph 2 is similar in meaning to ----------.

1) adapted
2) decomposed
3) transformed
4) decoupled

27- There are many computational techniques for solving nonlinear algebraic systems, ---------- approach exists for solving certain IEPs.

1) but no direct
2) and a direct
3) but no iterative
4) but no continuous

28- A direct approach for solving the IEP has been developed due to ----------.

1) the employment of the Lanczos method
2) the Jacobi structure of the problem
3) work presented by Boley and Golub
4) use of a nonlinear algebraic system

29- A method using only finitely many arithmetic operations of the field of concern in order to arrive at a solution ----------.

1) cannot be developed
2) is always at hand when MAPLE is used
3) can always be developed regardless of the structure of the problem
4) is at hand if the number of prescribed entries in a related matrix is limited to a certain extent

30- The word "invoke" in the last paragraph is similar in meaning to ----------.

1) call
2) transform
3) construct
4) induce

دروس پایه (ریاضی عمومی(۱و۲)، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال) :

۳۱- مقدار $\lim_{n\to\infty}(\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۱}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۲}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+n}})$ کدام است؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) $\ln ۲$

۴) $۲(\sqrt{۲}-۱)$

۳۲- اگر $A=\{p\in(۰,\infty)\mid \sum_{n=۱}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-۱)^p<\infty\}$، آنگاه A کدام است؟

۱) $(۱,\infty)$

۲) $[۱,\infty)$

۳) (e,∞)

۴) $[e,\infty)$

۳۳- مقدار $\lim_{x\to ۰}\frac{e-(۱+x)^{\frac{۱}{x}}}{x}$ کدام است؟

۱) $-\frac{e}{۲}$

۲) e

۳) $-e$

۴) $\frac{e}{۲}$

۳۴- مقدار $\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{۱+x^۲}}$ کدام است؟

۱) $\ln(۱+\sqrt{۲})$

۲) $\ln(۲+\sqrt{۲})$

۳) $\ln(۱+۲\sqrt{۲})$

۴) ∞

۳۵- سری مک‌لورن تابع $f(x)=\frac{x}{(1-x^2)^2}$ در فاصلهٔ $|x|<1$، کدام است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n+1}$

۲) $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$

۳) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n+1}$

۴) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n+1}$

۳۶- مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $r=\sin 2\theta$ و $r=\cos 2\theta$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

۲) $\frac{\pi}{2}-1$

۳) $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$

۴) $\pi-2$

۳۷- کدام گزینه در مورد $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+\sin y}{y+\sin x}$ درست است؟

۱) موجود و برابر ۱ است.

۲) موجود و برابر -1 است.

۳) موجود و برابر ۰ است.

۴) موجود نیست.

۳۸- مقدار $\int_0^1\int_{x^2}^1 e^{y^{\frac{3}{2}}}\,dy\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}e$

۲) $\frac{2e+2}{3}$

۳) $\frac{3}{2}e$

۴) $\frac{2e-2}{3}$

۳۹- مساحت بخشی از رویه $z^2 = 2xy$ واقع در یک هشتم اول فضا بین صفحات $x = 2$، $y = 1$ و صفحات مختصات کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶

۴۰- میدان نیروی $\vec{F}(x,y) = (3y^2 + 2, 16x)$ ذره‌ای را از نقطه $(1,0)$ به نقطه $(-1,0)$ در مسیر $b^2x^2 + y^2 = b^2$ جابه‌جا می‌کند. کار انجام شده به ازای کدام مقدار b ماکزیمم می‌شود؟

۱) $\frac{\pi}{2}$

۲) ۴

۳) π

۴) ۸

۴۱- نقیض گزاره زیر کدام است؟

به ازاء هر دو عدد α و β اگر $\alpha u + \beta v = 0$ آنگاه $\alpha = \beta = 0$

۱) اعداد ناصفر α و β وجود دارند که $\alpha u + \beta v \neq 0$

۲) اعداد ناصفر α و β وجود دارند که $\alpha u + \beta v = 0$

۳) اعداد α و β که حداقل یکی از آنها ناصفر است وجود دارند که $\alpha u + \beta v \neq 0$

۴) اعداد α و β که حداقل یکی از آنها ناصفر است وجود دارند که $\alpha u + \beta v = 0$

۴۲- کدام گزاره درست است؟

۱) $\forall x(p(x) \vee q(x)) \Rightarrow \forall x p(x) \vee \exists x q(x)$

۲) $\forall x \exists y p(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x p(x,y)$

۳) $\forall x(p(x) \vee q(x)) \Rightarrow \forall x p(x) \vee \forall x q(x)$

۴) $(\exists x p(x) \wedge \exists x q(x)) \Rightarrow \exists x(p(x) \wedge q(x))$

۴۳- فرض کنید $\mathcal{P}(X)$ گردایهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های X باشد. برای دو مجموعهٔ A و B کدام گزینه درست نیست؟

۱) اگر $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$ آنگاه $A \in B$.

۲) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

۳) اگر $A \in B$ آنگاه $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$.

۴) اگر $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ آنگاه $A \subseteq B$.

۴۴- فرض کنید $\mathbb{N}$ نمایش اعداد طبیعی باشد. رابطهٔ R_1 را روی $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$، رابطهٔ R_2 را روی $\mathbb{N}$ و رابطهٔ R_3 را روی $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f\ R_1\ g \Leftrightarrow \max_{x \in \mathbb{N}} f(x) = \max_{x \in \mathbb{N}} g(x)$$

$$x\ R_2\ y \Leftrightarrow |x - y| < 2$$

$$(x_1, y_1)\ R_3\ (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 y_1 = x_2 y_2$$

کدام‌یک از رابطه‌های R_1 و R_2 و R_3 هم‌ارزی هستند؟

۱) R_2 ۲) فقط R_1 ۳) R_1 و R_3 ۴) هیچ‌کدام

۴۵- عدد اصلی مجموعهٔ همهٔ توابع اکیداً نزولی از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ کدام است؟ (عدد اصلی $\mathbb{N}$ را با $\aleph_0$ نمایش می‌دهیم.)

۱) برابر $\aleph_0$ است. ۲) برابر صفر است. ۳) برابر ۱ است. ۴) برابر $2^{\aleph_0}$ است.

۴۶- اگر $V=\{(a+3b+4c+2d\ ,\ 2a+2b+4c\ ,\ 2b+2c+2d\ ,\ -b-c-d)\,|\,a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$ آنگاه بعد زیر فضای V از $\mathbb{R}^4$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴۷- A یک ماتریس 2×2 با درایه‌های حقیقی است که چند جمله‌ای مشخصهٔ آن برابر است با x^2+2x+3. مقدار $tr(A^2)$ برابر است با:

۱) -2 ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱۳

۴۸- تبدیل خطی $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y\\2x-y\end{bmatrix}$ داده شده است. ماتریس تبدیل خطی T^2 نسبت به پایه‌های استاندارد، کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}3&0\\0&-3\end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix}-3&0\\0&3\end{bmatrix}$

۴۹- اگر A یک ماتریس 3×3 با چند جمله‌ای مشخصه x^3-2x-3 باشد، آنگاه چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A^{-1} کدام است؟

۱) $x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}$

۲) $x^3+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

۳) $x^3-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

۴) $x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}$

۵۰- فرض کنیم $p_۲(\mathbb{R})$ فضای چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر ۲ روی $\mathbb{R}$ باشد و تبدیل خطی $T : p_۲(\mathbb{R}) \to p_۲(\mathbb{R})$ با ضابطه $T(f) = f + f' + f''$ را درنظر بگیرید. اگر $\beta = \{۱, x, x^۲\}$ پایه $p_۲(\mathbb{R})$ باشد، آنگاه $[T^{-۱}]_\beta$ کدام گزینه است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

۵۱- فرض کنید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در همهٔ نقاط گنگ پیوسته و مقدار آن در همه نقاط گویا برابر ۲ باشد. کدام گزینه درباره تابع f درست است؟

۱) مشتق‌پذیر است.

۲) پیوسته یکنواخت است ولی لزوماً مشتق‌پذیر نیست.

۳) پیوسته است ولی لزوماً پیوسته یکنواخت نیست.

۴) فقط در اعداد گنگ پیوسته است.

۵۲- فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ و $B = \left\{x \in \mathbb{R} : \inf_{a \in A} |x - a| = ۰\right\}$. کدام گزینه درست است؟

۱) $B = A^\circ$ (درون A)

۲) $B = A$

۳) $B = A'$ (نقاط حدی A)

۴) $B = \overline{A}$ (بستار A)

۵۳- دنباله $a_n = \underbrace{\sin \sin \ldots \sin}_{n \text{ بار}}(\frac{n\pi}{۲n+۱})$ را در نظر بگیرید. در مورد حد دنباله $\{a_n\}$ کدام گزینه درست است؟

۱) برابر ۰ است.

۲) برابر ۱ است.

۳) برابر $\sin ۱$ است.

۴) وجود ندارد.

۵۴- در مورد سری $\sum_{n=۱}^{\infty} (-۱)^n \frac{۱}{\ln(n+۱)}$ کدام گزینه درست است؟

۱) همگرای مطلق است.

۲) همگرای مشروط است.

۳) دنباله مجموع‌های جزئی آن کراندار است ولی سری واگراست.

۴) دنباله مجموع‌های جزئی آن کراندار نیست.

۵۵- فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد و تابع $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ تعریف شود. کدام گزینه درست است؟

۱) F یکنوا است.

۲) F بر (a,b) مشتق‌پذیر است.

۳) F بر $[a,b]$ پیوسته یکنواخت است.

۴) F بر $[a,b]$ پیوسته است ولی لزوماً پیوسته یکنواخت نیست.

۵۶- در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۸ با ۳ رقم مانتیس و روش گرد کردن، فاصله بین عدد ۱۳ (در مبنای ۱۰) و نزدیک‌ترین عدد قابل نمایش بزرگ‌تر از ۱۳ چقدر است؟

۱) $۸^{-۱}$

۲) $۸^{-۲}$

۳) $۸^{-۳}$

۴) $۲^{-۱}$

۵۷- جواب مسئله $\min_x \|Ax-b\|_۲$ که در آن، $A=A^T$، x^* است اگر و تنها اگر ..... باشد.

۱) Ax^*-b در برد A

۲) Ax^*-b در پوچ A

۳) Ax^*-b در پوچ $A^۲$

۴) x^* در جواب دستگاه $Ax=b$

۵۸- اگر $f(x)=\sin ۲x$، آن‌گاه مقدار کسرهای تفاضلی $f[۰,۰,۰]$ و $f[\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ به‌ترتیب برابرند با .....

۱) ۰ و ۰

۲) $-\frac{۴}{۳}$ و ۰

۳) $\frac{۴}{۳}$ و ۰

۴) ۰ و $\frac{۴}{۳}$

۵۹- فرض کنید $f(x)=x^m(x^p-x^n)$ که در آن m، p و n اعداد صحیح مثبت هستند. $q(x)$ را چند جمله‌ای درون‌یاب برای $m+p+۱$ دادهٔ متمایز $(x_i,f(x_i))$، $i=۰,...,m+p$، بگیرید. در این‌صورت، $f(x)\equiv q(x)$ اگر .....

۱) $p<n$

۲) $p\geq n$

۳) $n=p+۱$

۴) $n\neq m$

۶۰- فرض کنید تابع f بر بازه $[a,b]$ مشتق‌پذیر، $h=b-a$ و $\int_a^b f(x)dx \simeq hf(b)-\frac{h^2}{2}f'(b)$. درجه دقت فرمول و خطای آن عبارتست از ...

۱) درجه دقت ۲ و $\exists c\in(a,b): E=\frac{h^3}{6}f'''(c)$

۲) درجه دقت ۱ و $\exists c\in(a,b): E=\frac{h^2}{6}f''(c)$

۳) درجه دقت ۱ و $\exists c\in(a,b): E=\frac{h^3}{6}f''(c)$

۴) درجه دقت ۲ و $\exists c\in(a,b): E=\frac{h^2}{6}f'''(c)$

۶۱- انحراف معیار و صدک مرتبه ۲۵ام برای ۲۰ داده به ترتیب برابر صفر و ۱۰ است. میانگین داده‌ها کدام است؟

۱) صفر

۲) ۲

۳) ۲/۵

۴) ۱۰

۶۲- n نفر به تصادف روی n صندلی در یک ردیف می‌نشینند. احتمال اینکه دو نفر مشخص A و B کنار هم قرار نگیرند، کدام است؟

۱) $\frac{n-3}{n}$

۲) $\frac{n-2}{n}$

۳) $\frac{(n-3)}{n(n-1)}$

۴) $\frac{1}{n-1}$

۶۳- فرض کنید A یک مجموعهٔ $n=2k$ عضوی باشد. تعداد زیرمجموعه‌های غیرتهی A که تعداد اعضای آن‌ها زوج باشد، کدام است؟

۱) 2^{n-1}

۲) $2^{n-1}-1$

۳) $2^n-\frac{n}{2}$

۴) $2^n-\frac{n}{2}-1$

۶۴- کیسه‌ای شامل ۳ سکه است که یکی از آن‌ها سالم می‌باشد. احتمال پشت رو شدن دو سکه ناسالم $\frac{۳}{۵}$ و $\frac{۱}{۱۰}$ است. یک سکه را به تصادف از کیسه انتخاب و سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال مشاهده پیشامد {رو، رو، پشت} کدام است؟

۱) $\frac{۱۱۱}{۱۰۰۰}$

۲) $\frac{۱۵۱}{۱۰۰۰}$

۳) $\frac{۱۵۱}{۱۵۰۰}$

۴) $\frac{۱۱۱}{۱۵۰۰}$

۶۵- در جعبهٔ شماره یک، ۳ مهرهٔ سفید و ۲ مهره سیاه و در جعبهٔ شماره دو، ۵ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه وجود دارد. یک تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. اگر عدد رو شده مضرب ۳ باشد، مهره‌ای به تصادف از جعبه یک و در غیر این‌صورت از جعبه دوم مهره‌ای به تصادف انتخاب می‌شود. اگر مهره انتخابی سفید باشد با چه احتمالی از جعبهٔ شماره یک می‌آید؟

۱) $\frac{۳}{۸}$

۲) $\frac{۵}{۱۱}$

۳) $\frac{۵}{۸}$

۴) $\frac{۶}{۱۱}$

ساختمان داده‌ها، طراحی الگوریتم‌ها و مبانی نظریه محاسبه :

۶۶- در الگوریتم مرتب‌سازی ادغامی **(Merge sort)** برای مرتب‌سازی لیست های زیر ۲۰ عنصر از الگوریتم مرتب‌سازی درجی **(Insertion sort)** استفاده می‌کنیم، در این‌صورت پیچیدگی زمانی الگوریتم چه خواهد شد؟

۱) $\theta(n)$ ۲) $\theta(n^۲)$ ۳) $\theta(n\log n)$ ۴) $\theta(n^۲\log n)$

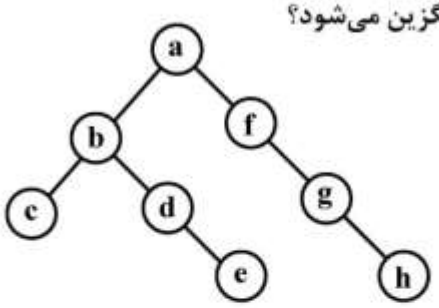
۶۷- فرض کنید $x=(x_۱,x_۲,...,x_n)$ و $y=(y_۱,y_۲,...,y_m)$ دو لیست پیوندی خطی ساده باشند. مرتبه زمانی الگوریتمی که دو لیست را در لیست z ترکیب می‌کند، کدام است؟

$$z=\begin{cases}(x_۱,y_۱,x_۲,y_۲,...,x_m,y_m,x_{m+۱},...,x_n) & \text{if } m\le n\\ (x_۱,y_۱,x_۲,y_۲,...,x_n,y_n,y_{n+۱},...,y_m) & \text{if } m>n\end{cases}$$

۱) $O(mn)$ ۲) $O(m+n)$

۳) $O(\max(m,n))$ ۴) $O(\min(m,n))$

۶۸- در درخت جستجوی باینری زیر با حذف ریشه کدام‌یک از عناصر زیر جایگزین می‌شود؟



۱) f یا b
۲) f یا e
۳) h یا c
۴) h یا e

۶۹- کمترین تعداد محاسبات برای ضریب دنباله‌ای از چهار ماتریس زیر کدام است؟

$A_{۲\times۵} \times B_{۵\times۴} \times C_{۴\times۲۰} \times D_{۲۰\times۱۰}$

۱) ۶۰۰ ۲) ۹۲۰ ۳) ۱۱۰۰ ۴) ۱۵۰۰

۷۰- مرتبه زمانی الگوریتم زیر کدام است؟

```
f(n)
{
    x = ۲; y = ۱;
    while(y <= n){
        y = y × x;
        x = x × x;
    }
}
```

۱) $n\log n$ ۲) $\log n \log n$ ۳) $\log(\log n)$ ۴) $\log(\log(\log n))$

۷۱- اعداد از ۱ تا ۶ به ترتیب از کوچک به بزرگ در ورودی یک پشته خالی (Stack) داده شده است و اعمال زیر بر روی پشته قابل انجام است:

Push: کوچک‌ترین عدد ورودی را برداشته و در پشته قرار می‌دهد.

Pop: عضو بالای پشته را از پشته حذف و سپس در خروجی قرار می‌دهد.

کدام‌یک از موارد زیر را نمی‌توان با هیچ ترتیبی از دو عمل فوق در خروجی داشته باشیم؟ (اعداد را از چپ به راست بخوانید).

۱) ۱۲۳۵۶۴
۲) ۲۱۵۳۴۶
۳) ۳۲۴۶۵۱
۴) ۴۳۲۱۶۵

۷۲- فرض کنید زیر برنامه $C = aux(A,B)$ دو ماتریس A و B با اندازه $n \times n$ را ضرب کرده و نتیجه را در C بر می‌گرداند. مقدار برگشتی تابع زیر برای ماتریس M کدام است؟

```
Mat(M)
{
  P = M ; Q = M
  for i = ۱  to n − ۱ do{
       P = aux(P,M)
       Q = aux(Q,P)
  }
  return(Q)
}
```

۱) M^n ۲) $M^{n-۱}$ ۳) $M^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$ ۴) $M^{\frac{n(n+۱)}{۲}}$

۷۳- در صورتی که جدول فراوانی نسبی کاراکترهای زیر را داشته باشیم، با استفاده از روش رمزگذاری هافمن معادل رمزگذاری شدهٔ کلمهٔ DATA کدام است؟ (به پیوند چپ مقدار صفر و به پیوند راست مقدار یک را نسبت دهید).

A	D	T
۰/۲۵	۰/۱	۰/۰۱

۱) ۰۱۱۰۰۱ ۲) ۰۱۰۰۱۰۰ ۳) ۰۱۱۰۰۰۱۰ ۴) ۰۱۰۰۱۰۰۰

۷۴- تابع زیر آدرس ریشه یک درخت را دریافت می‌کند. این تابع چه عملی انجام می‌دهد؟

```
int func(TreeNode * T)
{
   if (T == NULL) return(۰);
   else
   {
    m۱ = ۱ + func(T → leftChild);
   m۲ = ۱ + func(T → rightChild);
   if(m۱ > m۲)  return(m۱);
   else    return(m۲);
   }
 }
```

۱) تعداد گره‌های با دو فرزند را محاسبه می‌کند.
۲) تعداد گره‌های داخلی درخت را محاسبه می‌کند.
۳) تعداد کل گره‌های درخت را محاسبه می‌کند.
۴) ارتفاع درخت را محاسبه می‌کند.

۷۵- فرض کنید با استفاده از تابع هش همانی $(h(x) = x)$ که با استفاده از **linear probing** پیاده‌سازی شده است داده‌هایی را در یک آرایه قرار داده‌ایم و نتیجه به صورت زیر شده است.

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۹	۱۸		۱۲	۳	۱۴	۴	۲۱	

کدام ترتیب نشان‌دهندهٔ ترتیب ورودی داده‌ها است؟

۱) ۹,۱۴,۴,۱۸,۱۲,۳,۲۱ ۲) ۱۲,۳,۱۴,۱۸,۴,۹,۲۱ ۳) ۱۲,۹,۱۸,۳,۱۴,۲۱,۴ ۴) ۱۲,۱۴,۳,۹,۴,۱۸,۲۱

۷۶- در یک گراف دوبخشی که هر بخش آن $\frac{n}{۲}$ رأس داشته باشد مسأله درخت پوشانی کمینه **(MST)** را می‌توان در چه زمانی حل کرد؟

۱) $O(n)$ ۲) $O(n\log n)$ ۳) $O(n\log(\log n))$ ۴) $O(\log n\log(\log n))$

۷۷- رابطهٔ دنباله عددی **G** که توسط تابع زیر تولید می‌شود با دنباله عددی فیبوناچی کدام است؟

$$G(۰) = ۰$$
$$G(n) = n - G(G(n-۱)) \quad n > ۱$$

۱) هیچ رابطه‌ای بین دو دنباله وجود ندارد.
۲) دنباله G و دنباله فیبوناچی یکی هستند.
۳) دنباله فیبوناچی زیرمجموعه دنباله G است.
۴) دنباله G زیرمجموعه دنباله فیبوناچی است.

۷۸- فرض کنید **SAT** نشان‌دهندهٔ مسئله تصمیم‌گیری صدق پذیری و **HAM** نشان‌دهندهٔ مسئله تصمیم‌گیری گراف هامیلتونی باشد. در این صورت همه جملات زیر صحیح‌اند، به جز:

۱) اگر مسئله‌ای از کلاس NP متعلق به کلاس P باشد، آنگاه P=NP ، است.
۲) اگر X به صورت چندجمله‌ای به Y تقلیل یابد، آنگاه اگر $Y \in P$ باشد، $X \in P$ است.
۳) مسئله‌ای در کلاس NP وجود ندارد که برای حل آن الگوریتمی شناخته نشده باشد.
۴) اگر یک تقلیل چندجمله‌ای از مسئله X به SAT وجود داشته باشد، در این‌صورت یک تقلیل‌پذیری چندجمله‌ای از X به HAM نیز وجود دارد.

۷۹- اگر $T(n) = ۲T(\frac{n}{۴}) + \theta(۱)$ از مرتبه $\theta(\sqrt{n})$ باشد، آنگاه $T(n) = ۲T(\frac{n}{۴}) + \theta(\sqrt{n})$ از کدام مرتبه است؟

۱) $O(n)$ ۲) $O(\log^{۲} n)$ ۳) $O(n\sqrt{\log n})$ ۴) $\theta(\sqrt{n}\log n)$

۸۰- اگر $U(m) = T(۲^m)$ باشد و $T(n) = T(\frac{n}{۲}) + \log n$، آنگاه رابطه بازگشی **U** کدام است؟

۱) $U(m) = U(m-۱) + ۱$ ۲) $U(m) = U(m-۱) + m$
۳) $U(m) = U(m-۱) + \log m$ ۴) $U(m) = U(m-۱) + ۲^m$

۸۱- یک گراف وزن‌دار در نظر بگیرید که وزن تمام یال‌های آن ۱ است. برای یافتن مسیر کمینه بین دو رأس **u** و **v** استفاده از کدام الگوریتم بیشترین کارآیی را دارد؟

۱) Breadth – first search ۲) Bellman Ford's algorithm
۳) Depth – first Search ۴) Dijkstra's algorithm

۸۲- اگر یک درخت **AVL** با یک گره دارای عمق صفر باشد، آنگاه کمترین و بیشترین تعداد گره در یک درخت **AVL** بالانس با عمق ۵ چقدر است؟

۱) ۱۹ و ۶۳ ۲) ۱۹ و ۶۴
۳) ۲۰ و ۶۳ ۴) ۲۰ و ۶۴

۸۳- در یک هیپ (heap) با اندازه **n** حداکثر تعداد گره‌های چپ ریشه چند است؟

۱) $n-1$ ۲) $\frac{2n}{3}$ ۳) $\frac{n}{2}$ ۴) $\frac{n}{3}$

۸۴- آرایه **n**عضوی **A** را **k** چرخش مرتب شده می‌گوییم اگر بتوان اعداد آن را با **k** چرخش مرتب نمود. برای مثال [۳۵,۴۲,۵,۱۵,۲۷,۲۱] یک ۲ چرخش مرتب شده است. بهترین الگوریتم برای پیدا کردن ماکزیمم در چنین آرایه‌ای دارای چه مرتبه زمانی است؟

۱) $O(n)$ ۲) $O(n^2)$ ۳) $O(\log n)$ ۴) $O(n\log n)$

۸۵- فرض کنید می‌خواهیم **n** داده را با عوض کردن داده‌ها مرتب کنیم. در الگوریتم این محدودیت را اعمال می‌کنیم که عناصر **A[i]** با **A[j]** نمی‌تواند با هم عوض بشود مگر اینکه $|i-j|<\sqrt{n}$ باشد. بهترین حد پایین زمانی برای این الگوریتم کدام است؟

۱) $\Omega(n^{\frac{3}{2}})$ ۲) $\Omega(n^2)$ ۳) $\Omega(n\log n)$ ۴) $\Omega(n\sqrt{n}\log)$

۸۶- دو گرامر زیر را در نظر بگیرید. آنگاه کدام مورد صحیح است؟

G_1:

$S \to aS$

$S \to aSbS$

$S \to c$

G_2:

$S_1 \to T$

$S_1 \to U$

$T \to aTbT$

$T \to c$

$U \to aS_1$

$U \to aTbU$

۱) $L(G_1) \neq L(G_2)$

۲) $L(G_1) = L(G_2)$ هر دو گرامر مبهم هستند.

۳) $L(G_1) = L(G_2)$ هر دو گرامر غیرمبهم است.

۴) $L(G_1) = L(G_2)$ و G_1 گرامر مبهم و G_2 غیرمبهم است.

۸۷- با این شرط که

$\varepsilon \in L$

$\forall x,y \in L \quad axby\ ,\ bxay \in L$

زبان **L** کدام است؟

($n_a(x)$: تعداد کاراکتر **a** در رشته **x**)

۱) $L=\{x\in\Sigma^* \mid n_a(x)=n_b(x)\}$

۲) $L=\{x\in\Sigma^* \mid n_a(x)=n_b(x) \quad x\in\{a^+b^+\}\}$

۳) $L=\{x\in\Sigma^* \mid n_a(x)=n_b(x)\ \ x\in\{b^+a^+\}\}$

۴) $L=\{x\in\Sigma^* \mid n_a(x)=n_b(x)\ , x\in\{a^+b^+, b^+a^+\}\}$

۸۸- فرض کنید $L \subseteq \{a\}^*$ باشد، کدام جمله زیر صحیح است؟

۱) L منظم است.

۲) L مستقل از متن است.

۳) اگر L مستقل از متن باشد، پس L منظم است.

۴) اگر L Turing – decidable باشد، پس مستقل از متن است.

۸۹- برای کدام‌یک از زبان‌های زیر می‌توان یک NFA بدون ε ارائه داد که فقط دارای یک حالت پذیرش باشد؟

۱) $(0^+1^*)^*$ ۲) $(1^+ + 0^*)$ ۳) $(1+\varepsilon)0^*$ ۴) $(0^+ + 1^+)$

۹۰- $B_1 = \{1^k y 1^k \mid k \geq 1$ و $y \in \{0,1\}^*$ و y شامل حداقل k تا یک $\}$

$B_2 = \{1^k y 1^k \mid k \geq 1$ و $y \in \{0,1\}^*$ و y شامل حداکثر k تا یک $\}$

۱) زبان B_1 و B_2 منظم است.

۲) زبان B_1 و B_2 نامنظم است.

۳) زبان B_1 منظم و B_2 نامنظم است.

۴) زبان B_1 نامنظم و زبان B_2 منظم است.

۹۱- تفاوت ماشین‌های تورینگی که فقط زبان‌های منظم را می‌پذیرند با ماشین‌های تورینگ استاندارد کدام است؟

۱) سایز نوار به اندازه سایز ورودی است.

۲) روی ورودی نمی‌توانند بنویسند.

۳) روی هر سلول از نوار فقط یکبار می‌توان نوشت.

۴) سایز نوار به اندازه سایز ورودی است و روی نوار نمی‌توان نوشت ولی دو هِد دارند.

۹۲- کدام‌یک از جملات زیر صحیح است؟

۱) اگر برای یک زبان مستقل از متن نتوان یک ماشین پشته قطعی ارائه نمود، ممکن است زبان غیرمبهم باشد.

۲) اگر برای یک زبان مستقل از متن نتوان یک ماشین پشته قطعی ارائه نمود، پس زبان ذاتاً مبهم است.

۳) یک زبان L ذاتاً مبهم است که برای تولید هر رشته از زبان در گرامر G که $L(G) = L$، حداقل دو درخت اشتقاق وجود داشته باشد. (گرامر G مستقل از متن است.)

۴) یک زبان L ذاتاً مبهم است که برای تولید حداقل یک رشته از زبان به ازای گرامر G که $L(G) = L$، حداقل دو درخت اشتقاق وجود داشته باشد. (گرامر G مستقل از متن است.)

۹۳- همه عبارات زیر صحیح‌اند، به جز:

۱) اگر L_1 ، L_2 ..... Turing – recognitable است پس $L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$ Turing-recognizable است.

۲) اگر L Turing-recognizable است پس یک تابع محاسبه‌پذیر جزئی از Σ^* به Σ^* وجود دارد که بردش L است.

۳) اگر L Turing – recognizable است پس یک تابع محاسبه‌پذیر جزئی از Σ^* به Σ^* وجود دارد که دامنه‌اش L است.

۴) اگر L Turing-recognizable است ولی Turing-decidable نیست پس تعداد نامتناهی ورودی وجود دارد که به ازای هر ماشین تورینگ طراحی شده برای L در loop بی‌نهایت قرار می‌گیرد.

۹۴- کدام یک از زبان‌های زیر مستقل از متن هستند ولی زبان منظم نیستند؟

۱) $L = \{a^i b^j \mid i \neq j \ \& \ ۲i \neq j\}$

۲) $L = \{wtw^R \mid w,t \in \{a,b\}^*\}$

۳) $Z = \{w\#t \mid w \text{ is a substring of } t \text{ when } w,t \in \{a,b\}^*\}$

۴) فرض کنید $\Sigma = \{a,\#\}$ و

$Y = \{w \mid w = t_۱\#t_۲\#t_۳\#...\#t_k \ \ t_i \in ۱^* \ \& \ \ t_i \neq t_j \ \ \text{whenever} \ \ i \neq j\}$

۹۵- همه موارد زیر صحیح‌اند، به‌جز:

۱) برای هر زبان منظم، یک زیرمجموعهٔ منظم وجود دارد.

۲) برای هر زبان نامنظم، یک زیرمجموعه منظم وجود دارد.

۳) برای هر زبان منظم، یک زیرمجموعه سره منظم وجود دارد.

۴) برای هر زبان نامنظم، یک زیرمجموعه سره منظم وجود دارد.

مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها:

۹۶- فرض کنید تعبیرهای زیر را برای اعداد طبیعی در نظریهٔ مجموعه‌های ZFC داشته باشیم:

$۰ := \phi = \{\}$, $۱ := \{۰\}$, $۲ := \{۰,۱\}$ و .....

$< x,y > := \{\{x\},\{x,y\}\}$,

در این صورت چند تا از احکام زیر درست هستند؟

الف) $n = \bigcup(n+۱)$ برای هر عدد طبیعیِ n.

ب) $\bigcup\bigcup < m,n > = \max\{m,n\}$

ج) $m < n \Leftrightarrow m \in n$

د) $n+۱ = n \cup \{n\}$

هـ) n مجموعه‌ای n–عضوی است.

و) $< x,y > \in P(x \cup y)$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹۷- کدام‌یک از هم ارزی‌های منطقی ادعا شده زیر برقرار است؟

۱) $\exists x P(x) \to \forall y P(y) \equiv \forall x \forall y (P(x) \to P(y))$

۲) $\forall x P(x) \to \forall y P(y) \equiv \forall x \forall y (P(x) \to P(y))$

۳) $\forall x \exists y Q(x,y) \equiv \exists y \forall x Q(x,y)$

۴) $\exists y (R(y) \wedge S(y)) \equiv \exists y R(y) \wedge \exists y S(y)$

۹۸- برای اثبات کدام‌یک از احکام زیر به اصل انتخاب نیاز نیست؟

۱) قضیهٔ تمامیت گودل برای منطق مرتبهٔ اول.

۲) برای هر مجموعهٔ A ، یک رابطهٔ خوش‌ترتیبی روی A وجود دارد.

۳) تابعی مثل $f : P(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ هست که برای هر $\phi \neq X \subseteq \mathbb{N}$ داریم $f(x) \in X$.

۴) برای هر خانوادهٔ X از مجموعه‌های ناتهی طوری‌که برای هر $A,B \in X$ داشته باشیم $A \cap B = \phi$، مجموعه‌ای مثل $C \subseteq \bigcup X$ هست که برای هر $A \in X$، $C \cap A$ دقیقاً یک عضو دارد.

۹۹- کدام‌یک از مجموعهٔ ادواتِ معرفی شده، به‌طور تابعی کامل نیست؟

۱) $\{\rightarrow,\bot\}$ ۲) $\{\vee,\neg\}$ ۳) $\{\wedge,\neg\}$ ۴) $\{\wedge,\vee,T,\rightarrow\}$

۱۰۰- تابع بازگشتیِ f روی گزاره‌هایِ منطقِ گزاره‌ای به‌صورت استقرایی تعریف می‌شود:

برای هر P اتمی: $f(p)=1$

$f(\neg A)=2f(A)$

$f(A\wedge B)=3\times f(A)\times f(B)$

$f(A\rightarrow B)=7\times f(A)\times f(B)$

$f(A\vee B)=5\times f(A)\times f(B)$

از بین احکام زیر چند تا حکم صحیح وجود دارد؟

الف) اگر مقدار $f(A)$ داده شده باشد، A به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

ب) اگر $f(A)$ داده شده باشد، تعداد اتم‌های به‌کار رفته در A به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

ج) اگر $f(A)$ داده شده باشد، تعداد ادوات منطقیِ به‌کار رفته در A به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

د) اگر $f(A)$ داده شده باشد، تعداد نمادهای نقیض $(\neg)$ به‌کار رفته در A به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۱- می‌خواهیم تابع f را به‌صورت استقرایی روی گزاره‌ها (فرمول‌های منطق گزاره‌ای که با اتم‌های $P_1,P_2,\ldots$ و ادوات منطقیِ $\rightarrow,\neg,\vee,\wedge$ ساخته شده‌اند) طوری تعریف کنیم که برای هر A که در فرم نرمال عطفی باشد، $f(A)$ تعداد نقیضِ اتمی‌های به‌کار رفته در A را محاسبه کند. کدام مورد یک تعریف استقرایی درست برای این منظور می‌تواند باشد؟

۱) $\forall_i f(\neg P_i)=1, f(A\wedge B)=f(A\vee B)=f(A\rightarrow B)=f(A)+f(B)$
$\forall_i f(P_i)=1, f(\neg A)=1+f(A)$

۲) $\forall_i f(P_i)=0, f(A\wedge B)=f(A\vee B)=f(A)+f(B), f(\neg A)=1+f(A)$
$f(A\rightarrow B)=f(A)\times f(B)+1$

۳) $\forall_i f(P_i)=0, f(A\wedge B)=f(A\vee B)=f(A\rightarrow B)=1+f(A)+f(B), f(\neg A)=1+f(A)$

۴) $\forall_i f(P_i)=0, f(A\wedge B)=f(A\vee B)=f(A\rightarrow B)=\max\{f(A),f(B)\} f(\neg A)=1$

۱۰۲- فرض کنید $A(p,q,r)$ یک گزاره باشد که در آن تنها از سه متغیر اتمیِ p و q و r استفاده شده و می‌دانیم $A\rightarrow((p\rightarrow(q\rightarrow r))$ همانگو (راست‌گو، صادق) است. A حداکثر چند گزارهٔ غیرمعادل می‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۰۳- همه احکام زیر صحیح‌اند، به‌جز:

۱) همهٔ گزاره‌های ارضاپذیر از منطق گزاره‌ای تصمیم‌پذیرند.

۲) همهٔ همانگوهای منطق گزاره‌ای، تصمیم‌پذیرِ تورینگ هستند.

۳) همهٔ قضایای قابل اثبات در نظریهٔ مجموعه‌های ZFC، Turing-recognisable هستند.

۴) اگر مجموعهٔ اصول یک نظریه، تصمیم‌پذیر باشد، مجموعهٔ قضایای آن نظریه تصمیم‌پذیر است.

۱۰۴- فرض کنید Γ مجموعه‌ای از گزاره‌ها باشد. گوییم Δ یک پایه برای Γ است، اگر (۱) $\Delta \subseteq \Gamma$ و (۲) برای هر $A \in \Gamma$ داریم $\Delta \vdash A$ (۳) برای هر $B \in \Delta$ داریم $\Delta \setminus \{B\} \nvdash B$. کدام‌یک از احکام زیر درست است؟

۱) ϕ یک پایه برای $\Gamma = \{A : \vdash A\}$ است.

۲) $\{\bot\}$ یک پایه برای $\{p, \neg p, q\}$ است.

۳) $\{A \vee \neg A\}$ یک پایه برای $\{A \vee \neg A\}$ است.

۴) هر مجموعهٔ Γ از گزاره‌ها دارای پایه است.

۱۰۵- اگر برای مجموعه X مجموعه توانی X را با $P(X)$ نشان داده و برای هر n قرار دهید: $P^{n+1}(X) = P(P^n(X))$. در این صورت عدد اصلی مجموعه $P^5(\phi)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) 2^4 ۳) 2^5 ۴) 2^{16}

۱۰۶- فرض کنید که S ساختاری در یک زبان مرتبه اول شامل نمادِ تساوی و با جهانِ $\{1,2\}$ باشد. S چه تعداد از جملات زیر را برآورده می‌کند؟

$\exists x_1 \exists x_2\, x_1 \neq x_2$

$\exists x_1 \exists x_2\, \forall x (x = x_1 \vee x = x_2)$

$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \neq x_2)$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰۷- چند مورد از گزاره‌های زیر معتبر است؟

$p \to (q \to p)$

$((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p$

$(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$

$p \to \big(q \to (p \wedge q)\big)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۸- فرض کنید Σ مجموعه‌ای از گزاره‌هایی باشد که از اتم‌های (نمادهای گزاره‌ای ساده) $A_1, \ldots, A_n$ تشکیل شده‌اند. کدام‌یک از ادّعاهای زیر همواره درست است؟

۱) اگر F گزاره‌ای با اتم‌های $A_1, \ldots, A_n$ باشد آنگاه $\Sigma \models F$

۲) زیر مجموعه متناهی Σ_0 از Σ موجود است که برای هر $F \in \Sigma$ داریم: $\Sigma_0 \models F$

۳) $\Sigma \models A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$

۴) $\Sigma \models A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$

۱۰۹- فرض کنید A یک مجموعه متناهی و $f : A \to A$ یک تابع باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) اگر f یک به یک باشد، آنگاه f پوشا نیز هست و بالعکس.

۲) f^{-1} می‌تواند تابع باشد، امّا f پوشا نباشد.

۳) f می‌تواند یک به یک باشد، ولی پوشا نباشد.

۴) f می‌تواند پوشا باشد، ولی یک به یک نباشد.

۱۱۰- فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی و P یک افراز X باشد. اصل انتخاب می‌گوید یک زیرمجموعه X مانند R وجود دارد به‌طوری‌که:

۱) برای هر عضو C از P مجموعه $C \cap R$ ناتهی است.

۲) یک $C \in P$ وجود دارد به‌طوری‌که $C \cap R = \phi$.

۳) برای هر $C \in P$، مجموعه $C \cap R$ از یک و فقط یک عضو تشکیل شده است.

۴) برای هر عضو C از P مجموعه $C \cap R$ می‌تواند بیش از یک عضو داشته باشد.

۱۱۱- در یک قطعه از یک برنامه کامپیوتری، n متغیری صحیح است و آرایه $A[1], \ldots, A[20]$ به‌صورت زیر تعریف شده

```
for n := 1 to 20 do
A[n] := n * n - n.
```

کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) $(\forall n)(A[n] \geq 0)$

۲) $(\forall n)(A[n] > 0)$

۳) $(\exists n)(A[n] = 2A[n+1])$

۴) $(\forall n)((1 \leq n \leq 19) \rightarrow A[n] \geq A[20])$

۱۱۲- نقیض سور $(\exists x)[p(x) \rightarrow (q(x) \wedge r(x))]$ کدام است؟

۱) $(\forall x)[\sim p(x) \vee \sim q(x) \vee \sim r(x)]$

۲) $(\forall x)[p(x) \wedge (\sim q(x) \vee \sim r(x))]$

۳) $(\forall x)[\sim p(x) \rightarrow \sim q(x) \vee \sim r(x)]$

۴) $(\forall x)[p(x) \rightarrow \sim q(x) \vee \sim r(x)]$

۱۱۳- کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

۱) $(((p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow p) \rightarrow (q \vee r)$

۲) $((p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$

۳) $(((p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow r$

۴) $((p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$

۱۱۴- اگر نظریه $\Gamma \cup \{\varphi \rightarrow \psi\}$ سازگار باشد، آنگاه کدام مورد صحیح است؟

۱) حداقل یکی از نظریه‌های $\Gamma \cup \{\psi\}$ یا $\Gamma \cup \{\sim \varphi\}$ سازگار است.

۲) حداقل یکی از نظریه‌های $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ یا $\Gamma \cup \{\sim \varphi, \sim \psi\}$ سازگار است.

۳) حداکثر یکی از $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ و یا $\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\}$ می‌تواند سازگار باشد.

۴) هم $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ و هم $\Gamma \cup \{\varphi \vee \psi\}$ هر دو سازگارند.

۱۱۵- همهٔ استنتاج‌های زیر درست‌اند، به‌جز:

۱) $\forall x \exists y(S(x) \rightarrow R(x,y)) \Rightarrow \forall x(S(x) \rightarrow \exists y R(x,y))$

۲) $\forall x(S(x) \rightarrow \exists y R(x,y)) \Rightarrow \forall x \exists y(S(x) \rightarrow R(x,y))$

۳) $\exists y \forall x R(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y R(x,y)$

۴) $\forall x \exists y R(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x R(x,y)$

ریاضیات گسسته و مبانی ترکیبیات:

۱۱۶- به چند طریق می‌توان ۷ مهره رُخ یکسان را در یک صفحه شطرنجی ۸×۸ قرار داد به‌طوری که هیچ دوتایی از آن‌ها همدیگر را تهدید نکنند؟ (یعنی هیچ دو مهره‌ای در یک سطر یا در یک ستون نباشند)

۱) $8!$

۲) $(8!)^2$

۳) $8\times 8!$

۴) $7\times 7!$

۱۱۷- گراف G به‌صورت «هر زیر مجموعه ۳ عضوی از $x=\{1,2,...,10\}$ را یک رأس گراف در نظر می‌گیریم. دو رأس A و B را به هم وصل می‌کنیم هرگاه $A\cap B=\phi$.» تعریف می‌شود، این گراف چند یال دارد؟

۱) ۲۱۰۰

۲) ۲۱۰

۳) ۴۲۰

۴) ۴۲۰۰

۱۱۸- حداقل چه تعداد عدد متمایز دلخواه از مجموعهٔ $\{1,2,...,10\}$ باید برداریم تا مطمئن باشیم که در بین اعداد انتخاب شده، دو عدد با ب.م.م بزرگتر از ۱ وجود دارد؟

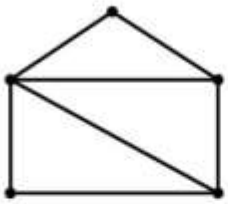
۱) ۵

۲) ۶

۳) ۷

۴) ۸

۱۱۹- به چند طریق می‌توان رئوس گراف زیر را با ۵ رنگ مختلف رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری که هیچ دو رأس مجاوری هم رنگ نباشند؟ (امکان دارد از بعضی از رنگ‌ها استفاده نشود.)



۱) ۱۶۰

۲) ۱۸۰

۳) ۵۴۰

۴) ۸۰۰

۱۲۰- اگر تابع مولد دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ برابر $A(x)$ و تابع مولد دنبالهٔ $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ برابر $B(x)$ باشد، آنگاه اگر $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ دنبالهٔ متناظر با تابع مولد $A(x^2)+xB(x^2)$ باشد، C_{2019} برابر است با:

۱) a_{1009}

۲) b_{1010}

۳) b_{4038}

۴) b_{1009}

۱۲۱- تعداد راه‌های افراز $\{۱,...,۸\}$ به زیر مجموعه‌های ۲ یا ۴ عضوی برابر است با:

۱) ۴۲۰

۲) ۳۵۰

۳) ۲۱۰

۴) ۱۴۰

۱۲۲- می‌خواهیم با شرایط زیر ۲۰ عدد میوه بخریم: (۱) تعداد سیب‌ها زوج باشد. (۲) تعداد موزها مضرب ۳ باشد. (۳) حداکثر ۱ هندوانه بخریم. (۴) حداکثر ۲ طالبی بخریم. چند روش برای انجام خرید فوق وجود دارد؟

۱) ۱۹

۲) ۲۰

۳) ۲۱

۴) ۲۲

۱۲۳- تعداد جایگشت‌های $(\Pi_۱,...,\Pi_{۱۰})$ از مجموعهٔ $\{۱,...,۱۰\}$ به‌طوری‌که به‌ازای هر $۱\le k\le ۱۰$ داشته باشیم $|\pi_k - k|\le ۱$ ، برابر است با:

۱) ۵۵

۲) ۸۹

۳) ۱۴۴

۴) ۴×۳^۸

۱۲۴- برای هر جایگشت $\pi=(\pi_۱,\pi_۲,...,\pi_n)$ از اعضای $X=\{۱,۲,...n\}$ ، $f_k(\pi)$ برابر تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی A از X تعریف می‌شود به‌طوری که $\{\pi(a)\,|\,a\in A\}=A$ به‌عنوان مثال برای جایگشت $\pi=(۲۳۱۵۶۴)$ از $x=\{۱,...,۶\}$ ، $f_۲(\pi)$ صفر است اما $f_۳(\pi)=۲$ میانگین f_k روی همه جایگشت‌های $\{۱,۲,...,n\}$ برابر است با:

۱) ۱

۲) k

۳) n

۴) $\frac{n}{k}$

۱۲۵- می‌خواهیم سه مجموعه A، B و C از زیرمجموعه‌های مجموعه $X=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ انتخاب کنیم به‌طوری که $A\subset B\subset C$ و $A\neq B\neq C$ باشد به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

۱) ۲۹۵

۲) ۵۰۶

۳) ۵۳۸

۴) ۵۷۰

۱۲۶- گراف مسطح و همبند G از مرتبه ۱۰، دقیقاً ۴ وجه مثلث شکل دارد. حداکثر تعداد یال‌های G چقدر است؟

۱) ۱۶

۲) ۱۸

۳) ۲۴

۴) ۳۰

۱۲۷- رابطهٔ R روی گراف‌های متناهی از مرتبه ۴ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$GRH \Leftrightarrow q(G) = q(H), \Delta(G) = \Delta(H)$$

چند کلاس هم ارزی تحت این رابطه، ایجاد می‌شود؟

۱) ۱۲

۲) ۱۰

۳) ۸

۴) ۶

۱۲۸- کمترین مقدار n را بیابید به‌طوری که گزاره زیر همیشه درست باشد:

«یال‌های K_n را به هر شکل دلخواه با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم حداقل یک مسیر تک‌رنگ به طول ۳ وجود دارد.»

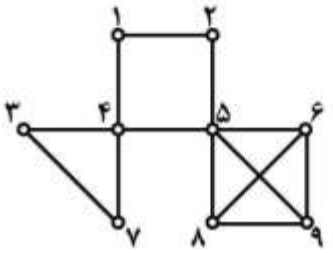
۱) ۷

۲) ۶

۳) ۵

۴) ۴

۱۲۹- گراف زیر دارای چند درخت فراگیر است؟



۱) ۱۹۲

۲) ۱۸۴

۳) ۱۸۰

۴) ۱۴۴

۱۳۰- تعداد درخت‌های فراگیر گراف بر چسب‌گذاری شدهٔ K_5 با $\Delta \leq 3$ برابر است با (منظور از Δ ماکزیمم درجهٔ درخت مورد نظر است.)

۱) ۲۵

۲) ۶۰

۳) ۱۲۰

۴) ۱۲۵

۱۳۱- تعداد n بیضی در صفحه رسم شده‌اند به‌طوری که هر دو بیضی یکدیگر را در ۲ نقطه قطع می‌کنند و هیچ ۳ بیضی از یک نقطه نمی‌گذرند. اگر تعداد نواحی ایجاد شده در صفحه را r_n بنامیم، مقدار $r_{۱۰۰}$ برابر است با:

۱) ۹۹۰۲

۲) $۲^{۱۰۰}$

۳) ۹۹۹۸

۴) $۲^{۱۰۰} - ۲\binom{۹۹}{۳} + ۲$

۱۳۲- تعداد رابطه‌های پادمتقارن روی مجموعه $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ که شامل (۱,۲) باشد اما شامل (۳,۴) نباشد، چندتاست؟

۱) ۳۷۸۸

۲) ۵۱۲

۳) ۱۲۹۶

۴) ۲۵۹۲

۱۳۳- متحرکی در نقطه (۰,۰) از صفحه مختصات قرار دارد، این متحرک می‌تواند دو نوع حرکت به‌صورت $S:(x,y)\to(x+1,y+1)$ و $R:(x,y)\to(x+1,y)$ انجام دهد این متحرک به چند طریق می‌تواند به نقطه (۱۶,۱۰) برسد به‌طوری که حتماً از نقطه (۸,۴) بگذرد؟

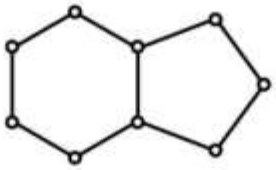
۱) $\frac{(16!)^2}{(10!)(6!)}$

۲) $\frac{8!}{(4!)(2!)^3}$

۳) $\frac{(16)!}{(10!)(6!)^2}$

۴) $\frac{(8!)^2}{(4!)^3(2!)}$

۱۳۴- دو دور C_5 و C_6 را از طریق یک یال به هم چسبانده‌ایم به چند طریق می‌توان رئوس این گراف را با ۳ رنگ، رنگ کرد به‌طوری که هیچ دو رأس مجاوری همرنگ نباشند؟



۱) ۳۳۰

۲) ۳۸۴

۳) ۶۶۰

۴) ۷۶۸

۱۳۵- ضریب جملهٔ x^{302} در عبارت $\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^6)}$ برابر است با:

۱) ۱۳۲۶

۲) ۲۰۶۱

۳) ۳۰۱۶

۴) ۶۱۳۲