کد کنترل
731
A

731A

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی‌ارشد ناپیوستهٔ داخل ـ سال ۱۴۰۰

صبح پنجشنبه

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

ریاضی ـ (کد ۱۲۰۸)

تعداد سؤال: ۱۵۰ — مدت پاسخ‌گویی: ۲۵۵ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شمارهٔ سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شمارهٔ	تا شمارهٔ
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۴۰	۳۱	۷۰
۳	آنالیز ریاضی	۲۰	۷۱	۹۰
۴	مبانی جبر و مبانی ترکیبات	۲۰	۹۱	۱۱۰
۵	جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل	۲۰	۱۱۱	۱۳۰
۶	احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی۱	۲۰	۱۳۱	۱۵۰

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به‌منزلهٔ عدم حضور شما در جلسهٔ آزمون است.

اینجانب ..... با شمارهٔ داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان‌بودن شمارهٔ صندلی خود را با شمارهٔ داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچهٔ سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچهٔ سؤالات و پائین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

***Directions**: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the correct choice on your answer sheet.*

1- **I ---------- the argument because I didn't know enough about the subject.**
1) depicted 2) confronted 3) dropped 4) broached

2- **Because my husband is a ---------- supporter of the high school football team, he donates money to their organization every year.**
1) zealous 2) anomalous 3) receptive 4) successive

3- **Since the journey is ----------, be sure to bring a first-aid kit.**
1) courageous 2) cautious 3) enormous 4) perilous

4- **The writer's stories appeal to a wide range of people—young and old, ---------- and poor, literary and nonliterary.**
1) economical 2) financial 3) affluent 4) elite

5- **His nostalgic ---------- of growing up in a small city are comical, though they are perhaps embellished for comic effect.**
1) impacts 2) accounts 3) entertainments 4) bibliographies

6- **On a chilly night, you might like to curl up by the fireside and ---------- a cup of hot chocolate while reading one of Thurber's books.**
1) imbibe 2) amalgamate 3) relieve 4) fascinate

7- **Although Mr. Jackson was ----------, he attempted to be jovial so that his colleagues at the meeting wouldn't think there was a problem.**
1) unpretentious 2) painstaking 3) apprehensive 4) attentive

8- **Obviously the network is overreacting and engaging in ---------- when they say "55 million people are in danger!" for normal thunderstorms.**
1) distinction 2) exaggeration 3) expectation 4) justification

9- **My high school biology teacher loved to ---------- from science into personal anecdotes about his college adventures.**
1) evolved 2) converted 3) reversed 4) digressed

10- **Landing a plane on an aircraft carrier requires a great deal of ----------, as you can crash if you miss the landing zone by even a little bit.**
1) precision 2) innovation 3) superiority 4) variability

PART B: Cloze Test

***Directions*: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.**

For some time now, medical scientists have noted an alarming increase in diseases of the heart and circulation among people who smoke cigarettes. (11) ---------- in the bloodstream causes blood vessels to contract, thus (12) ---------- circulation, which eventually leads to hardening of the arteries. (13) ---------- the arteries stiffen, less blood reaches the brain, and the end result of this slowdown is a cerebral hemorrhage, commonly (14) ---------- to as a "stroke". In addition, (15) ---------- reduces the ability of the hemoglobin to release oxygen, resulting in shortness of breath.

11- 1) The presence of tobacco is found
2) The presence of tobacco it is found
3) To be found the presence of tobacco
4) It has been found that the presence of tobacco

12- 1) slows 2) to slow 3) slowing 4) it slows

13- 1) So 2) As 3) Afterwards 4) Due to

14- 1) referred 2) that referred 3) referring 4) it is referred

15- 1) bloodstream's tobacco 2) the tobacco in bloodstream it
3) tobacco in the bloodstream which 4) tobacco in the bloodstream

PART C: Reading Comprehension

***Directions*: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.**

PASSAGE 1:

Number of Steps, Work per Step, and Preconditioning

Gaussian elimination. QR factorization. and most other algorithms of dense linear algebra fit the following pattern: there are $O(m)$ steps, each requiring $O(m^2)$ work, for a total work estimate of $O(m^3)$. (Of course these figures, especially the second, may change on a parallel computer.) For iterative methods, the same figures still apply, but now they represent a typical worst-case behavior. When these methods succeed, they may do so by reducing one or both of these factors.

We shall see that the number of steps required for convergence to a satisfactory precision typically depends on spectral properties of the matrix A, if the word "spectral" is interpreted broadly. For example, the conjugate gradient iteration is guaranteed to solve a hermitian positive definite system $Ax=b$ quickly if the eigenvalues of A are clustered well away from the origin. Similarly, the Lanczos iteration is guaranteed to compute certain eigenvalues of a real hermitian matrix quickly if those eigenvalues are well separated from the rest of the spectrum (and if the

initial vector that starts the iteration is suitably generic). The analysis of the convergence rates of these methods is a fascinating study that depends on the mathematical field of approximations theory. Specifically. the convergence of Krylov subspace iterative algorithms is closely related to problems of approximation of functions f(z) by polynomials p(z) on subsets of the real axis or the complex plane.

The work per step in a matrix iteration depends mainly on the structure of the matrix and on what advantage is taken of this structure in the $x \rightarrow A.x$ black box.

The ideal iterative method in linear algebra reduces the number of steps from m to O(1) and the work per step from $O(m^2)$ to O(m), reducing the total work from $O(m^3)$ to O(m). Such extraordinary speedups do occur in practical problems, but a more typical improvement is perhaps from $O(m^3)$ to $O(m^2)$. In a practical large-scale engineering computation of the mid-1990s, whelk iterative algorithms are successful, perhaps a typical result is that they beat direct algorithms by a factor on the order of 10. As machines get faster and m gets larger in the future, this factor will increase and iterative algorithms will become more important, illustrating the fundamental law of computer science, the faster the computer, the greater the importance of speed of algorithms.

16- Iterative methods of concern in the first paragraph require a total work ----------.

1) of $O(m^3)$ 2) of $O(m^2)$

3) of O(m) 4) bigger than $O(m^3)$

17- If the Eigen values of the hermitian positive definite matrix A are not clustered around the origin, then one ----------.

1) cannot expect solving Ax = b quickly
2) can expect solving Ax = b quickly
3) can quickly proceed to the Lanczos iteration
4) cannot make use of the conjugate gradient method effectively

18- Starting with a proper vector, if certain eigenvalues of a real hermitian matrix are apart from the spectrum, then Lanczos method ----------.

1) can quickly be replaced by conjugate gradient iteration
2) is expected to fail
3) is questionably reliable
4) can be expected to be fast

19- Choose and mark the choice having the word closest in meaning to the underlined word "clustered" in paragraph 2.

1) truncated 2) interchanged 3) ground together 4) rounded

20- As computers grow to be faster, ----------.

1) direct algorithms surpass iterative algorithms
2) iterative algorithms lose their importance
3) the speed of algorithm is of no importance
4) the speed of algorithms turns to be more important

PASSAGE 2:

Motivation

During the past twenty years mathematics and engineering have been increasingly directed towards problems of decision making in physical or organizational systems. This trend has been inspired primarily by the significant economic benefits which often result from a proper decision concerning the distribution of expensive resources, and by the repeated demonstration that such problems can be realistically formulated and mathematically analyzed to obtain good decisions.

The arrival of high-speed digital computers has also played a major role in the development of the science of decision making. Computers have inspired the development of larger systems and the coupling of previously separate systems, thereby resulting in decision and control problems of correspondingly increased complexity. At the same time, however, computers have revolutionized applied mathematics and solved many of the complex problems they generated.

It is perhaps natural that the concept of best or optimal decisions should emerge as the fundamental approach for formulating decision problems. In this approach a single real quantity, summarizing the performance or value of a decision, is isolated and optimized (i.e., either maximized or minimized depending on the situation) by proper selection among available alternatives. The resulting optimal decision is taken as the solution to the decision problem. This approach to decision problems has the virtues of simplicity, preciseness, elegance, and, in many cases, mathematical tractability. It also has obvious limitations due to the necessity of selecting a single objective by which to measure results. But optimization has proved its utility as a mode of analysis and is firmly entrenched in the field of decision making.

Much of the classical theory of optimization, motivated primarily by problems of physics, is associated with great mathematicians: Gauss, Lagrange, Euler, the Bernoulis, etc. During the recent development of optimization in decision problems, the classical techniques have been reexamined, extended, sometimes rediscovered, and applied to problems having quite different origins than those responsible for their earlier development. New insights have been obtained and new techniques have been discovered. The computer has rendered many techniques obsolete while making other previously impractical methods feasible and efficient. These recent developments in optimization have been made by mathematicians, system engineers, economists, operations researchers, statisticians, numerical analysts, and others in a host of different fields.

21- ---------- have driven mathematics towards decision making problems.

1) Monetary gains
2) Mathematical insights
3) Mathematical elegance
4) Organizational systems

22- The availability of computers created ----------.

1) critical complexity issues for problem solving
2) a significant role for decision making
3) an opportunity for development of scientific decision making problems
4) a tremendous capability for applied mathematics to solve complicated problems

23- An optimal quantity ----------.

1) is considered to be an improper selection
2) serves as a measure of the merit of a decision
3) ,being isolated, has no mathematical significance
4) may turn to disregard more proper alternatives

24- Select and mark the best choice for the meaning of the underlined word "preciseness" in paragraph 3.

1) exactness 2) generality 3) decidability 4) acceptability

25- The computer ----------.

1) has redirected the attention from problem of physics to other disciplines
2) has created many methods to be practical
3) has turned supposed impractical methods to be practical
4) enabled mathematicians to follow classical developments

PASSAGE 3:

SUMMARY

We shall be concerned with theoretical models in which probabilities enter as free parameters in much the same way as masses in mechanics. They are applied in many and variable ways. The technique of applications and the intuition develop with the theory.

This is the standard procedure accepted and fruitful in other mathematical disciplines. No alternative has been devised which could conceivably fill the manifold needs and requirements of all branches of the growing entity called probability theory and its applications.

We may fairly lament that intuitive probability is insufficient for scientific purposes, but it is a historical fact. In example I, (6.b), we shall discuss random distributions of particles in compartments. The appropriate, or "natural," probability distribution seemed perfectly clear to everyone and has been accepted without hesitation by physicists. It turned out, however, that physical particles are not trained in human common sense, and the "natural" (or Boltzmann) distribution has to be given up for the Einstein–Bose distribution in some cases, for the Fermi-Dirac distribution in others. No intuitive argument has been offered why photons should behave differently from protons and why they do not obey the "a priori" laws. If a justification could now be found, it would only show that intuition develops with theory. At any rate, even for applications freedom and flexibility are essential, and it would be pernicious to fetter the theory to fixed poles.

It has also been claimed that the modern theory of probability is too abstract and too general to be useful. This is the battle cry once raised by practical-minded people against Maxwell's field theory. The argument could be countered by pointing to the unexpected new applications opened by the abstract theory of stochastic processes, or to the new insights offered by the modern fluctuation theory which once more belies intuition and is leading to a revision of practical attitudes. However, the discussion is useless; it is too easy to condemn. Only yesterday the practical things of today were decried as impractical, and the theories which will be practical tomorrow will always be branded as valueless games by the practical men of today.

26- The modern theory of probability is ----------.
1) decided to be useless
2) impractical, like Maxwell's field theory
3) finding its practical significance
4) deemed to be useless in the study of stochastic processes

27- Probability as a free parameter ----------.
1) lacks intuitive interpretations
2) has been applied in a variety of ways
3) has found a limited application
4) has a limited application, like mass in mechanics

28- Intuitive probability ----------.
1) is deemed to be useless
2) is found to be insufficient
3) has found no practical applications
4) has shown to be adequate for scientific purposes

29- Choose and mark the choice that is closest in meaning to the underlined word "essential" in paragraph 3.
1) reversible 2) immaterial 3) controversial 4) fundamental

30- Photons and protons ----------.
1) behave differently, even though intuitive argument has not been provided
2) are intuitively argued to behave similarly
3) behave differently, as observed by massive experimentations
4) obey "a prior" laws

دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۳۱ تعداد و محل تقریبی ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $x(x-1)(x-2)=1$، کدام است؟
۱) تنها یک ریشه در بازهٔ $[0,1]$ دارد.
۲) تنها یک ریشه در بازهٔ $[2,3]$ دارد.
۳) یک ریشه در بازهٔ $[0,1]$ و دو ریشه به‌ازای $x \geq 2$ دارد.
۴) سه ریشه به‌ازای $x \geq 2$ دارد.

۳۲ مقدار $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})\cdots(1+\frac{1}{n})}$ کدام است؟
۱) صفر
۲) e
۳) ۱
۴) $+\infty$

۳۳- فاصلهٔ همگرایی سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{4n} + x^{-4n} + 3}{1 + x^{2n} + x^{-2n}}$ کدام است؟

۱) $|x| > 1$

۲) $0 < |x| < 1$

۳) همواره واگرا است.

۴) به‌جز $x = 0$ همواره همگرا است.

۳۴- معادلهٔ صفحهٔ مماس بر رویه با معادلات پارامتری $z = \sin u$ و $x = \cos u \cos v$ ، $y = \cos u \sin v$ به‌ازای $u = \frac{\pi}{4}$ و $v = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $2x + 2y + \sqrt{2}\, z = 3$

۲) $x + y + \sqrt{2}\, z = 2$

۳) $2x + 2y + \frac{\sqrt{2}}{2} z = \frac{5}{2}$

۴) $x + y + \frac{\sqrt{2}}{2}\, z = 2$

۳۵- حاصل $\int_{1}^{\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx$ کدام است؟

۱) $\ln 2$

۲) $\frac{\pi}{2} + \ln 2$

۳) $\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2}$

۴) ∞

۳۶- فرض کنید f یک تابع پیوسته و به‌ازای مقادیر ثابت و مثبت a و b و هر $x \in [0,1]$ در $[a,b]$ قرار گیرد. اگر $A = \int_{0}^{1} \frac{dx}{f(x)}$ باشد، آن‌گاه کدام رابطه درست است؟

۱) $A \geq \frac{2}{b} - \frac{1}{a} \int_{0}^{1} f(x) dx$

۲) $A \geq \frac{2}{a} - \frac{1}{b} \int_{0}^{1} f(x) dx$

۳) $A \leq \frac{2}{b} - \frac{1}{ab} \int_{0}^{1} f(x) dx$

۴) $A \leq \frac{2}{a} - \frac{1}{ab} \int_{0}^{1} f(x) dx$

۳۷- حاصل انتگرال $\iint_D (x+1)^2 y^2 dxdy$ در ناحیهٔ D درون مثلثی با رأس‌های $(0,0)$ و $(-1,1)$ و $(1,1)$، کدام است؟

۱) صفر

۲) $\frac{49}{90}$

۳) ۱

۴) $\frac{23}{18}$

۳۸- انحنای منحنی $r = 3 + 2\cos\theta$ در نقطهٔ $(3, \frac{\pi}{2})$ در مختصات قطبی، کدام است؟

۱) $\frac{17}{13\sqrt{13}}$

۲) $\frac{1}{\sqrt{13}}$

۳) $\frac{13}{17}$

۴) $\frac{17}{13}$

۳۹ حاصل $\iint_S (yzdydz + zxdzdx + xydxdy)$ که در آن S سطح کره‌ای به مرکز مبدأ مختصات به شعاع واحد است، کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$

۲) $\frac{4}{3}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) $\frac{8}{3}$

۴۰- فرض کنید V حجم ناحیه‌ای باشد که از اطراف به استوانهٔ $r = \cos\theta$، از بالا به مخروط $z = 16 - \sqrt{x^2 + y^2}$ و از پایین به صفحه xy محدود است. مقدار V کدام است؟

۱) $2\pi - \frac{2}{9}$

۲) $2\pi - \frac{4}{9}$

۳) $4\pi - \frac{2}{9}$

۴) $4\pi - \frac{4}{9}$

۴۱- درباره معادله $y' = -\frac{y + xy^{۲} + \frac{۱}{x}}{۳x^{۲}y + \frac{۱}{y}}$، کدام گزینه درست است؟

۱) عامل انتگرال‌ساز به‌صورت تابعی از $z = xy$ است.

۲) عامل انتگرال‌ساز به‌صورت تابعی از $z = \frac{x}{y}$ است.

۳) عامل انتگرال‌ساز به‌صورت تابعی از x است.

۴) عامل انتگرال‌ساز به‌صورت تابعی از y است.

۴۲- برای به‌دست آوردن جواب معادله زیر به‌صورت سری توانی ریشه‌های معادله شاخص کدام است؟

$$۲x^{۲}y'' + (x^{۲} - ۴x)y' + (۳x - ۸)y = ۰$$

۱) -۸ و ۰

۲) ۱ و -۴

۳) ۸ و ۰

۴) ۴ و -۱

۴۳- اگر تابع f لاپلاس وارون تابع $F(s) = \tan^{-۱}(\frac{\pi}{s+۱})$ باشد، آنگاه $f(\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) ۰

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\frac{۲}{\sqrt{e}}$

۴) $\sqrt{\pi}$

۴۴- جواب عمومی معادله زیر کدام است؟

$$xy'' + (۱-۲x)y' + (x-۱)y = (۲x-۱)\sin x - \cos x$$

۱) $y = C_{۱}e^{-x} + C_{۲}e^{-x}\ln x + \sin x$

۲) $y = C_{۱}e^{\ x} + C_{۲}e^{\ x}\ln x + \cos x$

۳) $y = C_{۱}e^{x} + C_{۲}e^{x}\ln x + \sin x$

۴) $y = C_{۱}e^{x} + C_{۲}e^{x}\ln x + \cos x$

۴۵- اگر تابع $y_{۰}$ جواب معادلهٔ $ydx + (۱ + y^{۲} - x)dy = ۰$ با شرط اولیه $y(۱) = ۲$ باشد، آنگاه مقدار تابع $y_{۰}$ در نقطه $x_{۰} = -۲$ کدام است؟

۱) -۱

۲) ۰

۳) ۳

۴) $\sqrt{۲}$

۴۶- **نقیض گزارهٔ زیر کدام است؟**

«اگر عددی نامنفی باشد و از هر عدد مثبت کوچکتر باشد، آنگاه آن عدد صفر است.»

۱) اگر عددی از همهٔ اعداد مثبت کوچکتر باشد مساوی صفر است.

۲) عددی مثبت وجود دارد که از برخی اعداد مثبت کوچکتر است.

۳) عددی مثبت وجود دارد که از تمام اعداد مثبت بزرگتر است.

۴) عددی مثبت وجود دارد که از تمام اعداد مثبت کوچکتر است.

۴۷- **فرض کنیم** $B=\left\{r\in\mathbb{Q}:0<r\wedge 3<r^2\right\}$ **و** $A=\left\{r\in\mathbb{Q}:r<0\vee r^2\le 3\right\}$. **کدام گزینه درست است؟**

۱) مجموعهٔ A بیشینه دارد ولی کمینه ندارد.

۲) مجموعهٔ B کمینه دارد ولی بیشینه ندارد.

۳) مجموعهٔ A کراندار است ولی B کراندار نیست.

۴) مجموعهٔ B زیرینه (اینفیمم) دارد و $A\cap B=\emptyset$ و $A\cup B=\mathbb{Q}$.

۴۸- **فرض کنید A شمارای نامتناهی باشد و B توان پیوستار (قوت متصله) داشته باشد. کدام گزینه درست است؟ (هرگاه مجموعه‌ای با $\mathbb{R}$ هم عدد باشد گوئیم توان پیوستار دارد.)**

۱) B^A شمارا است.

۲) $A\times B$ توان پیوستار دارد.

۳) $A^{A\cup B}$ توان پیوستار دارد.

۴) اگر $A\cap B\neq\emptyset$، آنگاه $A\cap B$ توان پیوستار دارد.

۴۹ **فرض کنید A، B، C و D مجموعه‌های دلخواه باشند. کدام گزینه نادرست است؟ ($\cong$ نماد هم عدد بودن در مجموعه‌ها است.)**

۱) $\left(A^B\right)^D\cong A^{B\times D}$

۲) $(A\times B)^C\cong A^C\times B^C$

۳) $A^B\times A^C\cong A^{B\cup C}$

۴) اگر $A\cong B$ و $C\cong D$، آنگاه $A^C\cong B^D$.

۵۰- **فرض کنید A یک مجموعهٔ نامتناهی و B یک مجموعهٔ نامتناهی شمارا باشد. کدام گزینه درست است؟ (البته فرض بر آنست که اصل انتخاب را پذیرفته‌ایم.)**

۱) تابعی یک به یک از B به A وجود دارد.

۲) تابعی یک به یک از A به B وجود دارد.

۳) اگر تابع $f:A\to A$ یک به یک باشد، پوشا هم هست.

۴) اگر تابع $f:A\to A$ پوشا باشد، یک به یک هم هست.

۵۱- مجموعه مقادیر ویژه ماتریس ۳×۳ حقیقی A برابر است با $\{-۱, i, -i\}$. در این‌صورت:

۱) $A^{-۱} = -A^۲ - A - I$

۲) $A^{-۱} = A^۲ - A - I$

۳) $A^{-۱} = A^۲ + A - I$

۴) $A^{-۱} = -A^۲ + A + I$

۵۲- فرض کنید $P_۴$ فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۴ باضرایب حقیقی باشد. اگر

$$W = \{f(x) \in P_۴ \mid f(۱) + f(-۱) = ۰ = f(۲) + f(-۲)\}$$

آن‌گاه بعد زیرفضای W برابر است با:

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۵۳ فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F و $T : V \to V$ یک عملگر خطی باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T$، آن‌گاه $T^۲ = ۰$.

۲) اگر $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T$، آن‌گاه $\operatorname{Ker}(I + T) = \{۰\}$.

۳) اگر $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T$، آن‌گاه $\dim_F V$ عددی زوج است.

۴) اگر $T \neq ۰$، $T^۲ = ۰$ و $\dim_F V$ عددی زوج باشد آن‌گاه $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Im} T$.

۵۴- فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی با درایه‌های حقیقی باشند به‌طوری‌که $A^۲ \neq A$ و $B^۲ = ۲B$. اگر چندجمله‌ای‌های مشخصه A و B به‌ترتیب برابر باشند با $x(x-۱)^۲$ و $x^۲(x-۲)^۲$، آنگاه چندجمله‌ای مینیمال ماتریس بلوکی $\begin{bmatrix} A & ۰ \\ ۰ & B \end{bmatrix}$ برابر است با:

۱) $x^۳(x-۱)^۲(x-۲)^۲$

۲) $x(x-۱)(x-۲)$

۳) $x(x-۱)^۲(x-۲)$

۴) $x^۲(x-۱)^۲(x-۲)^۲$

۵۵ فرض کنید A و B دو ماتریس $n\times n$ حقیقی متمایز باشند به‌طوری‌که $AB = BA$. اگر A دارای n مقدار ویژه متمایز باشد، کدام گزینه صحیح است؟

۱) هر مقدار ویژه A، یک مقدار ویژه B است.

۲) هر بردار ویژه A، یک بردار ویژه B است.

۳) حداقل یک بردار ویژه A موجود است که بردار ویژه B نیست.

۴) حداقل یک مقدار ویژه A موجود است که مقدار ویژه B نیست.

۵۶ فرض کنید تابع حقیقی f بر $[۰,۱]$ پیوسته، بر $(۰,۱)$ مشتق‌پذیر و حدهای $\lim_{x\to ۱} f'(x)$ و $\lim_{x\to ۰} f'(x)$ موجود و متناهی باشند. کدام گزینه درست است؟

۱) تابع f' بر $[۰,۱]$ موجود و یکنواخت پیوسته است.

۲) f' در نقاط ۰,۱ موجود است ولی لزوماً پیوسته نیست.

۳) تابع f' بر $[۰,۱]$ موجود و پیوسته است ولی یکنواخت پیوسته نیست.

۴) f' در نقاط ۰,۱ لزوماً موجود نیست.

۵۷- فرض کنید $f:(۰,\infty)\to(۰,\infty)$ پیوسته باشد و $\lim_{x\to\infty} f(x)\int_۰^x f(t)dt = ۱$. اگر $F(x)=\int_۰^x f(t)dt$، آنگاه $\lim_{x\to\infty} F(x)$ برابر کدام است؟

۱) ۱

۲) c

۳) $\sqrt{۲}$

۴) ∞

۵۸- فرض کنید $۰<a<b$. دنبالهٔ $\{a_n\}$ را با ضابطهٔ $a_n=\begin{cases} a^{n+۳} & n \text{ زوج} \\ b^{n+۳} & n \text{ فرد}\end{cases}$ تعریف می‌کنیم.

فرض کنید $\alpha=\overline{\lim_{x\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}$، $\beta=\underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{a_{n+۱}}{a_n}$ و $\gamma=\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{a_{n+۱}}{a_n}$. کدام گزینه درست است؟

۱) $\alpha=b$، $\beta=۰$ و $\gamma=\infty$.

۲) $\alpha=\gamma=b$ و $\beta=۰$.

۳) $\alpha=\beta=a$ و $\gamma=b$.

۴) $\alpha=a$، $\beta=۰$ و $\gamma=\infty$.

۵۹- فرض کنید سری $\sum_{h=۱}^{\infty} a_n$ همگرا و دنباله $\{a_n\}$ نزولی است. کدام سری همگرا است؟

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} ۳^n a_{۲^n}$

۲) $\sum_{n=۱}^{\infty} \sqrt[n]{n}\, a_n$

۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n+۱}{\sqrt{n}} a_n$

۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{a_۱+a_n}{n}$

۶۰ تابع $f:[-۱,۱]\to[-۱,۱]$ مفروض است. پیوستگی کدام تابع بر $[-۱,۱]$ معادل پیوستگی تابع f بر $[-۱,۱]$ است؟

۱) fof

۲) $f^۲$

۳) $f^۳$

۴) $fofof$

۶۱- یک سیستم ممیز شناور نرمال شده با نمایش اعداد به‌صورت $\pm ۰/d_۱ d_۲ d_۳ \times ۵^e$ با d_iها رقم‌هایی در مبنای ۵، $-۴ \le e \le ۴$ و روش بریدن برای نمایش اعداد مدنظر است. تعداد اعداد قابل نمایش و روند عدد یک در این سیستم به‌ترتیب برابرند با .....

۱) ۱۸۰۱ و ۰/۰۲ ۲) ۱۸۰۱ و ۰/۰۴

۳) ۱۶۰۱ و ۰/۰۲ ۴) ۱۶۰۱ و ۰/۰۴

۶۲- فرض کنید A یک ماتریس متقارن و معین مثبت است. تجزیهٔ A به‌صورت $A = LL^T$ با L یک ماتریس پایین مثلثی با روش حذف گاوسی را در نظر بگیرید. در این فرایند، محور عملیات حذفی در هر تکرار .....

۱) اگر چه مثبت است، ممکن است نیاز به محورگزینی باشد.

۲) ممکن است صفر، منفی یا مثبت باشد.

۳) ممکن است صفر شود و نیاز به محورگزینی باشد.

۴) مقداری مثبت است و نیازی به محورگزینی نیست.

۶۳- درون‌یابی $n \ge ۲$ دادهٔ متمایز (x_i, y_i) ، $i = ۱,\dots,n$، مدنظر است. چندجمله‌ای $P(x)$ به‌صورت:

$$P(x) = \frac{(x - x_n)P_۱(x) - (x - x_۱)P_۲(x)}{x_۱ - x_n}$$

یک چندجمله‌ای درون‌یاب از درجهٔ ..... به‌ترتیب چندجمله‌ای‌های درون‌یاب یکتا در نقاط $x_۱,\dots,x_{n-۱}$ و $x_۲,\dots,x_n$ باشند.

۱) n است اگر $P_۱(x)$ و $P_۲(x)$ ۲) $n-۱$ است اگر $P_۲(x)$ و $P_۱(x)$

۳) $n-۱$ است اگر $P_۱(x)$ و $P_۲(x)$ ۴) n است اگر $P_۲(x)$ و $P_۱(x)$

۶۴ رابطهٔ تکراری $x_{n+۱} = x_n(۲ - tx_n)$ را در نظر بگیرید. اگر دنبالهٔ تولید شده از این رابطهٔ تکراری با شروع از یک نقطهٔ اولیهٔ $x_۰$ به عددی ناصفر همگرا شود، آن‌گاه این دنباله به ..... همگرا است.

۱) $\frac{۱}{t}$ با همگرایی موضعی مرتبه دوم ۲) ۱ یا ۱− با همگرایی موضعی مرتبه دوم

۳) ۱ یا ۱− با همگرایی موضعی خطی ۴) $\frac{۱}{t}$ با همگرایی موضعی خطی

۶۵- حل عددی معادلهٔ دیفرانسیل با شرط اولیه به‌صورت $y'(x) = f(x, y(x))\ ,\ y(x_۰) = y_۰$ با تقریب عددی به‌صورت (y_i را تخمین $y(x_i)$ بگیرید)

$$y_{i+۱} = y_i + \frac{h_{i+۱}}{۲}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+۱}, y_i + h_i f(x_i, y_i))\right]$$

$$h_{i+۱} = x_{i+۱} - x_i\ ,\ i = ۰,۱,۲,\dots$$

مدنظر است. اگر $y(۱) = ۱$ ، $y'(x) = x^۲ + y^۲ - xy$، آن‌گاه با در نظر گرفتن $h_۱ = ۰/۱$، مقدار $y_۱ \approx y(۱/۱)$ کدام است؟

۱) ۱/۱۰۰۵ ۲) ۱/۱۰۱۵ ۳) ۱/۱۱۰۵ ۴) ۱/۱۱۱۵

۶۶- از بین اعداد دو رقمی ۹۹,...,۱۱,۱۰ یک عدد به تصادف انتخاب می‌شود. اگر بدانیم که عدد انتخاب شده زوج است، چقدر احتمال دارد این عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

۶۷- با ارقام $1,2,...,n$، چند عدد k رقمی $(k < n)$ که دارای ارقام تکراری باشند می‌توان ساخت؟

۱) $\frac{n!}{(n-k)!}$ ۲) $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

۳) $n^k - \frac{n!}{(n-k)!}$ ۴) $n^k - \frac{n!}{k!(n-k)!}$

۶۸- تاس A دارای ۴ وجه قرمز و ۲ وجه سفید و تاس B دارای ۴ وجه سفید و ۲ وجه قرمز است. یک سکه را پرتاب می‌کنیم اگر شیرآمد بازی را با تاس A و اگر خط آمد با تاس B انجام می‌دهیم. اگر دو پرتاب اولیه قرمز باشد، احتمال اینکه سومین پرتاب قرمز باشد کدام است؟

۱) $\frac{2}{6}$ ۲) $\frac{2}{5}$

۳) $\frac{3}{6}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۶۹- یک کارخانه قطعات الکتریکی قطعات خود را در بسته‌های ۱۰تایی عرضه می‌کند. قسمت بازرسی این کارخانه ۳ قطعه از یک بسته را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کند اگر هر ۳ قطعه سالم باشد آن بسته را روانه بازار می‌کند. حال اگر ۳۰ درصد از بسته‌ها شامل ۴ قطعه خراب و بقیه آن‌ها شامل یک قطعه خراب باشند، چند درصد از بسته‌ها روانه بازار می‌شود؟

۱) ۵۴ ۲) ۵۲

۳) ۴۸ ۴) ۵۰

۷۰- یک سکه سالم ۲۰ بار پرتاب می‌شود. احتمال پیشامد اینکه حداقل ۳ شیر پشت سرهم باشند برابر ۰/۷۸۷۰ است. همچنین احتمال اینکه حداقل ۳ شیر پشت سرهم باشند یا حداقل ۳ خط پشت سرهم باشند برابر ۰/۹۷۹۱ است. احتمال آمدن حداقل ۳ شیر پشت سرهم و حداقل ۳ خط پشت سرهم چقدر است؟

۱) ۰/۵۹۴۹ ۲) ۰/۷۸۷۰

۳) ۰/۸۹۲۱ ۴) ۰/۶۰۴۹

آنالیز ریاضی:

۷۱- دربارهٔ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x+(1-nx)^2}$ کدام گزینه نادرست است؟

۱) بر بازه $(1, +\infty)$ نقطه‌وار همگراست.

۲) بر بازه $(-1, +0)$ نقطه‌وار همگراست.

۳) بر بازه $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ یکنواخت همگراست.

۴) بر بازه $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ یکنواخت همگراست.

۷۲- فرض کنیم x و y دو فضای متریک و $f : X \to Y$ تابعی پوشا و پیوسته باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $B \subseteq Y$ چگال باشد آن‌گاه $f^{-1}(B) \subseteq X$ نیز چگال است.

۲) اگر $A \subseteq X$ چگال باشد آن‌گاه $f(A) \subseteq Y$ نیز چگال است.

۳) اگر $\Lambda \subseteq X$ هیچ‌جا چگال باشد آن‌گاه $f(\Lambda) \subseteq Y$ نیز هیچ‌جا چگال است.

۴) اگر $B \subseteq Y$ هیچ‌جا چگال باشد آن‌گاه $f^{-1}(B) \subseteq X$ نیز هیچ‌جا چگال است.

۷۳- فرض کنیم d و ρ دو متریک تعریف شده روی مجموعه X هستند. کدام گزینه با گزاره زیر معادل نیست؟
«تابع همانی $f : (X,d) \to (X,\rho)$ یک همسان‌ریختی است.»

۱) به‌ازای هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X و $y \in X$، $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y) = 0$ اگر و تنها اگر $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,y) = 0$.

۲) $\exists \alpha,\beta > 0 \quad \forall x,y \in X \quad (d(x,y) \le \alpha\rho(x,y) \wedge \rho(x,y) \le \beta d(x,y))$

۳) به‌ازای هر $E \subseteq X$، E نسبت به متر d باز است اگر و تنها اگر E نسبت به متر ρ باز باشد.

۴) به‌ازای $E \subseteq X$، E نسبت به متر d فشرده است اگر و تنها اگر E نسبت به متر ρ فشرده باشد.

۷۴- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک است و $E \subseteq X$. کدام زیرمجموعه از X لزوماً بسته نیست؟
(البته $B(x,r)$ گوی به مرکز x و شعاع r است.)

۱) $\{x \in X \mid \forall r > 0 \; B(x,r) \cap E$ ناشمار$\}$

۲) $\{x \in X \mid \forall r > 0 \; B(x,r) \cap E - \{x\} \neq \emptyset\}$

۳) $\{x \in E \mid \exists r > 0 \; B(x,r) \cap E = \{x\}\}$

۴) $\{x \in X \mid \forall r > 0 \; B(x,r) \cap E \neq \emptyset, B(x,r) \cap E^c \neq \emptyset\}$

۷۵- فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله در یک فضای متریک باشد. کدام گزاره درست است؟

۱) دنبالهٔ $\{x_n\}$ کوشی است اگر و تنها اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$ همگرا باشد.

۲) دنبالهٔ $\{x_n\}$ کوشی است اگر و تنها اگر دنبالهٔ مجموع‌های جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$ کران‌دار باشد.

۳) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n-1})$ همگرا باشد آن‌گاه دنبالهٔ $\{x_n\}$ کوشی است ولی عکس این گزاره درست نیست.

۴) اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ کوشی باشد آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1})$ همگرا است ولی عکس این گزاره درست نیست.

۷۶- فرض کنید (X,d) و (Y,ρ) فضاهای متریک باشند. تابع $f : X \to Y$ و دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع بر X به توی Y مفروضند. کدام‌یک از گزینه‌ها تعریف همگرایی یکنواخت $f_n \to f$ بر X است؟
(البته در فرمول‌های منطقی ε و δ مقید به اعداد مثبت، n و N مقید به اعداد طبیعی و x و y مقید به مجموعهٔ X هستند.)

۱) $\forall \varepsilon \exists N \forall x \forall n (n > N \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x) < \varepsilon)$

۲) $\forall \varepsilon \forall x \exists N \forall n (n > N \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x) < \varepsilon)$

۳) $\forall \varepsilon \exists \delta \forall x \forall y \forall n (d(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon)$

۴) $\forall x \forall \varepsilon \exists N \forall n (n > N \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x) < \varepsilon)$

۷۷- شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}n^{n!}\left(\frac{2x+x_0}{4}\right)^{(n+1)!}$ کدام است؟

۱) ∞ ۲) ۲

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۴

۷۸- فرض کنید $\alpha > 0$. در مورد سری توابع $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + x^2}}$ کدام گزینه درست است؟

۱) سری بر $\mathbb{R}$ یکنواخت همگراست.

۲) سری فقط بر بازهٔ $(-1,1)$ یکنواخت همگراست.

۳) سری بر $\mathbb{R}$ نقطه‌وار همگراست ولی بر هیچ بازه‌ای همگرایی یکنواخت نیست.

۴) سری فقط برای $\alpha > 2$ بر $\mathbb{R}$ همگراست.

۷۹ فرض کنید (X,d) یک فضای متریک کامل باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱) دنبالهٔ $\{a_n\}$ در (X,d) همگراست اگر $\lim_{n\to\infty} d(a_n, a_{n+1}) = 0$

۲) دنبالهٔ $\{a_n\}$ در (X,d) همگراست اگر $\lim_{n,m\to\infty} d(a_n, a_m) = 0$

۳) هر دنبالهٔ کشی در (X,d) همگراست.

۴) هر دنبالهٔ کشی کراندار است.

۸۰ فرض کنید f تابعی پیوسته بر فضای متریک همبند X به توی فضای متریک Y باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) $f(X)$ لزوماً همبند نیست.

۲) یا $f(X)$ تک نقطه‌ای است یا ناشمارا.

۳) $f(X)$ شمارای نامتناهی است.

۴) $f(X)$ مجموعه‌ای متناهی با بیش از یک عضو است.

۸۱- در فضای $C[-1,1]$ با متر یکنواخت $d(f,g) = \sup_{|x|\le 1}|f(x)-g(x)|$، کدام مجموعه بسته نیست؟

۱) مجموعه همه توابع پیوسته f که $f(0) = 0$

۲) مجموعه همه توابع انتگرال پذیر f که $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 0$

۳) مجموعه همه توابع زوج و پیوسته f که $f(0) = 0$

۴) مجموعه همه توابع مشتق‌پذیر f که $f'(0) = 0$

۸۲- در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ کدام گزینه درست است؟ (منظور از کامل Perfect است.)

۱) هر مجموعه کامل، فشرده است.

۲) هر مجموعه فشرده، همبند است.

۳) هر مجموعه فشرده، کامل است.

۴) هر مجموعه همبند با بیش از یک عضو، کامل است.

۸۳- فرض کنید $c > 0$ و $n \geq 1$ و $x \in [0,1]$ $f_n(x) = n^c x(1-x^2)^n$. کدام گزینه نادرست است؟

۱) برای هر $c < 1$ همگرایی $\{f_n\}$ بر $[0,1]$ یکنواخت است.

۲) برای هر $c > 0$ و هر $x \in [0,1]$، $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ موجود و متناهی است.

۳) برای هر $c < 1$، $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$.

۴) همگرایی $\{f_n\}$ بر $[0,1]$ برای هر $c < \frac{1}{2}$ یکنواخت است ولی برای $c \geq \frac{1}{2}$ همگرایی یکنواخت نیست.

۸۴- فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد، $a \in X$ و $B_1(a) = \{x \in x : \ d(x,a) < 1\}$. کدام گزینه درست است؟

۱) $\overline{B_1(a)}$ فشرده است.

۲) هر دنباله در $\overline{B_1(a)}$ زیر دنباله‌ای همگرا دارد.

۳) $\overline{B_1(a)} = \{x \in X : d(x,a) \leq 1\}$

۴) برای هر $A \subseteq X$، $\overline{A} \cap B_1(a) \subseteq \overline{A \cap B_1(a)}$

۸۵- برای زیرمجموعه های $B = \{(x,0) : x \geq 1\}$ و $\Lambda = \left\{(x,\frac{1}{x}) : x \geq 1\right\}$ در $\mathbb{R}^2$ کدام گزینه درست است؟

۱) A و B بسته هستند و $d(A,B) = 0$.

۲) Λ بسته نیست و $d(\Lambda,B) = 0$.

۳) B بسته نیست و $d(A,B) = 0$.

۴) Λ و B بسته هستند و $d(\Lambda,B) > 0$.

۸۶- فرض کنید $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته غیرثابت باشد به‌طوری که $g(1) = 0$. دنبالهٔ $\{f_n\}$ از توابع بر $[0,1]$ را با ضابطهٔ $f_n(x) = x^n g(x) \quad (x \in [0,1])$ درنظر می‌گیریم. کدام گزینه در مورد $\{f_n\}$ درست است؟

۱) $\{f_n\}$ به طور یکنواخت همگرا به صفر است.

۲) $\{f_n\}$ همگرای نقطه‌وار به تابعی ناپیوسته است.

۳) $\{f_n\}$ همگرای نقطه‌وار به تابع صفر است ولی لزوماً همگرای یکنواخت نیست.

۴) $\{f_n\}$ همگرای نقطه‌وار به تابعی غیرثابت است ولی لزوماً همگرای یکنواخت نیست.

۸۷- برای کدام‌یک از مجموعه‌های A و B، تابع دوسویی پیوسته $f : \Lambda \to B$ وجود دارد؟

۱) $A = [0,1)$ ، $B = (0,1)$

۲) $\Lambda = [0,1]$ ، $B = [0,1)$

۳) $\Lambda = [0,1]$ ، $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ x^2 + y^2 = 1\}$

۴) $A = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ ، $B = (0,1) \cup \{2\}$

۸۸- فرض کنید (X,d) یک فضای متریک است به‌طوری که $\text{Sup}\{d(x,y) \mid x,y \in X\} = +\infty$. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $E \subseteq X$ نقطه حدی نداشته باشد آن‌گاه $X \setminus E$ در X چگال است.

۲) اگر $E \subseteq X$ بستار متناهی باشد آن‌گاه $X \setminus E$ در X چگال است.

۳) اگر $E \subseteq X$ درون تهی داشته باشد آن‌گاه $X \setminus E$ در X چگال است.

۴) اگر $E \subseteq X$ متناهی باشد آن‌گاه $X \setminus E$ در X چگال است.

۸۹- دربارهٔ یک فضای متریک (X,d) کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر هر زیرمجموعه تک عضوی X باز باشد آن‌گاه هر زیرمجموعه X، باز است.

۲) اگر هر زیرمجموعه بسته و کراندار در X فشرده باشد آن‌گاه X، یک فضای متریک کامل است.

۳) اگر $f: X \to X$ تابعی پیوسته باشد آن‌گاه تابع $g(x) = d(f(x), x)$ پیوسته است.

۴) اگر برد هر تابع پیوسته $f: X \to X$ یک مجموعه کراندار باشد آن‌گاه X فشرده است.

۹۰- فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر است و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $g_n(x) = n\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right)$. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $\{g_n\}$ به f' بر $\mathbb{R}$ نقطه‌وار همگرا باشد آن‌گاه f' پیوسته است.

۲) اگر f' بر $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته باشد آن‌گاه $\{g_n\}$ به f' بر $\mathbb{R}$ یکنواخت همگراست.

۳) اگر f بر $\mathbb{R}$ یکنواخت پیوسته باشد آن‌گاه $\{g_n\}$ به f' بر $\mathbb{R}$ یکنواخت همگراست.

۴) اگر $\{g_n\}$ به f' بر $\mathbb{R}$ یکنواخت همگرا باشد آن‌گاه f یکنواخت پیوسته است.

مبانی جبر و مبانی ترکیبیات:

۹۱- حلقه $\mathbb{Z}_{۲۴} \times \mathbb{Z}_{۹}$ چند عضو پوچ‌توان دارد؟

۱) ۴

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۲

۹۲- فرض کنید: $I = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] | f(۱) = ۰\}$ ، $J = \{f(x) \in \mathbb{Z}_{۶}[x] | f(۱) = ۰\}$. در این‌صورت:

۱) I و J ایده‌آل‌های اول به‌ترتیب $\mathbb{Z}[x]$ و $\mathbb{Z}_{۶}[x]$ هستند.

۲) I یک ایده‌آل اول $\mathbb{Z}[x]$ است ولی J ایده‌آل اولی از $\mathbb{Z}_{۶}[x]$ نیست.

۳) I یک ایده‌آل ماکسیمال $\mathbb{Z}[x]$ است ولی J ایده‌آل ماکسیمالی از $\mathbb{Z}_{۶}[x]$ نیست.

۴) I یک ایده‌آل ماکسیمال $\mathbb{Z}[x]$ نیست ولی J ایده‌آل ماکسیمالی از $\mathbb{Z}_{۶}[x]$ است.

۹۳- کدام گزاره همواره صحیح است؟

۱) مرکز هر حلقه، ایده‌آلی از آن حلقه است.

۲) اگر $S \subseteq R$ دو حلقه یکدار باشند آنگاه $1_S = 1_R$.

۳) هر عضو ناصفر یک حلقه متناهی و یکدار، یا وارون‌پذیر است یا مقسوم‌علیه صفر.

۴) مجموع یک عضو پوچ‌توان و یک عضو وارون‌پذیر، یک عضو وارون‌پذیر حلقه یکدار است.

۹۴- فرض کنید $f: \mathbb{Z}_{۲۸} \to \mathbb{Z}_{۱۶}$ یک هم‌ریختی گروهی باشد و $f(۱) = ۱۲$. در این‌صورت هسته f برابر است با:

۱) $\langle ۲ \rangle$

۲) $\langle ۴ \rangle$

۳) $\langle ۷ \rangle$

۴) چنین هم‌ریختی‌ای موجود نیست.

۹۵- فرض کنید $f:R\to S$ یک هم‌ریختی پوشا از حلقه R به حلقه S باشد. اگر $Char(R)$ مشخصه حلقه R باشد، آن‌گاه کدام گزینه همواره صحیح است؟

۱) اگر $Char(S)\neq 0$ ، آن‌گاه $Char(R)\neq 0$ و $Char(R)\big|Char(S)$.

۲) اگر $Char(R)\neq 0$ ، آن‌گاه $Char(S)\neq 0$ و $Char(R)\big|Char(S)$.

۳) اگر $Char(S)\neq 0$ ، آن‌گاه $Char(R)\neq 0$ و $Char(S)\big|Char(R)$.

۴) اگر $Char(R)\neq 0$ ، آن‌گاه $Char(S)\neq 0$ و $Char(S)\big|Char(R)$.

۹۶ گروه $\dfrac{\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6}{\langle(2,3)\rangle}$ با کدام گروه یک‌ریخت است؟

۱) $\mathbb{Z}_{12}$

۲) $\mathbb{Z}_4$

۳) $\mathbb{Z}_6$

۴) $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6$

۹۷- یادآوری می شودکه H را زیرگروه مشخص G گویند هرگاه به‌ازای هر خودریختی از G مانند τ، داشته باشیم $\tau(H)\leq H$.دراین حالت می‌نویسیم $HchG$. حال فرض کنید G یک گروه و $K\leq H\leq G$. کدام‌یک از گزاره‌های زیر در مورد زیرگروه مشخص صحیح است؟

۱) اگر $KchH$ و $HchG$ آنگاه $KchG$.

۲) اگر $H\trianglelefteq G$ و $KchH$ آنگاه $K\trianglelefteq G$.

۳) $Z(G)chG$ که درآن $Z(G)$ مرکز گروه G است.

۴) همه موارد صحیح است.

۹۸- فرض کنید G یک گروه متناهی و H و K دو زیرمجموعه G باشند، به‌طوری‌که $|H|+|K|>|G|$ که در آن $|X|$ تعداد اعضای مجموعه X است. اگر $HK=\{hk\,|\,h\in H,k\in K\}$، کدام گزاره صحیح است؟

۱) $G=HK$

۲) $H\cap K\neq\{e\}$

۳) HK لزوماً زیرگروهی از G نیست.

۴) HK ممکن است زیرگروهی از G باشد ولی $G\neq HK$.

۹۹ اگر p عددی اول باشد، هر گروه از مرتبه p^n را یک $p-$گروه متناهی گوییم و می‌دانیم که مرکز هر $p-$گروه متناهی، نابدیهی است.

فرض کنیم G یک $p-$گروه متناهی باشد به‌طوری‌که مرکز آن دوری است. اگر $G\cong A\times B$ که در آن A و B دو گروه و $A\neq\{e\}$، آن‌گاه:

۱) $G\cong A$

۲) $B\neq\{e\}$

۳) $A\cong B$

۴) A و B زیرگروه‌های واقعی G هستند.

۱۰۰- فرض کنید G گروهی ناآبلی و H و K دو زیرگروه ماکسیمال متمایز آن باشند. اگر H و K هر دو آبلی باشند، آن‌گاه:

۱) $H \cap K = \{e\}$

۲) $Z(G) \subsetneq H \cap K$

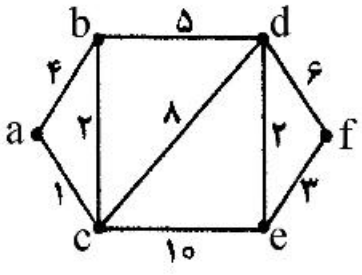
۳) $Z(G) = H \cap K$

۴) $H \cap K \subsetneq Z(G)$

۱۰۱- فرض کنید G گرافی همبند ۱۲ رأسی و ۱۸ یالی باشد که به‌صورت مسطح در صفحه رسم شده است. تعداد وجوه ایجاد شده، کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۰۲- در گراف زیر، کم‌ترین وزن در میان مسیرهای بین نقاط a و f کدام است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۳

۳) ۱۴

۴) ۱۵

۱۰۳- با ۱۲ نفر می‌خواهیم ۳ گروه ۴ نفره برای بحث‌کردن تشکیل دهیم. به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) $4\binom{12}{3}^2$

۲) $3\binom{12}{4}^2$

۳) $\frac{12!}{2^{10} \times 3^4}$

۴) $\frac{12!}{2^9 \times 3^3}$

۱۰۴- فرض کنید G یک گراف ساده ۲۰۰ رأسی باشد که هیچ سه رأسی دوبه‌دو به هم وصل نیستند. حداکثر تعداد یال‌های G برابر است با:

۱) ۱۲۰۰۰

۲) ۱۰۰۰۰

۳) ۸۰۰۰

۴) ۵۰۰۰

۱۰۵- فرض کنید $X = \{1,2,\ldots,8\}$. گرافی تشکیل می‌دهیم. به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ۴ عضوی یک رأس بگذارید. دو رأس را به هم وصل کنید. اگر اشتراک آن‌ها ۲ عضوی باشد، درجهٔ هر رأس این گراف برابر است با:

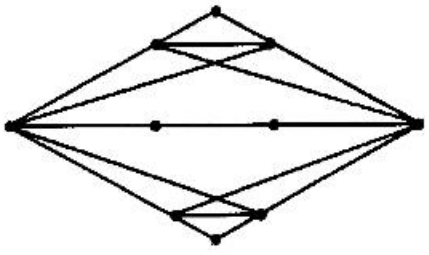
۱) ۲۵

۲) ۳۰

۳) ۳۶

۴) ۹۰

۱۰۶- **فرض کنید G گراف مقابل باشد، کدام گزاره در مورد G صحیح است؟**



۱) G گرافی فاقد رأس برشی و یال برشی است.

۲) G گرافی دوبخشی است.

۳) G گرافی اویلری است.

۴) G گرافی همیلتنی است.

۱۰۷- **همهٔ گزینه‌های زیر صحیح‌اند، به‌جز: (در این سؤال گراف‌ها را ساده درنظر بگیرید.)**

۱) گراف مسطح دوبخشی ۴ منظم وجود ندارد.

۲) گراف G یک گراف با حداقل ۱۱ رأس باشد آن‌گاه G یا $\overline{G}$ نامسطح است.

۳) در هر گراف مسطح و همبند یک رأس با درجهٔ کمتر از ۶ وجود دارد.

۴) گراف مسطح ۱۰۰ رأسی با ۲۹۵ یال وجود دارد.

۱۰۸- **تعداد دنباله‌های ۵ رقمی که هر رقم آن برابر ۰ ،۱ یا ۲ است و تعداد صفرهای آن فرد می‌باشد، برابر است با:**

۱) ۱۲۱

۲) ۴۰

۳) ۲۴۲

۴) ۸۰

۱۰۹- **۷ مهرهٔ آبی و ۱۱ مهرهٔ قرمز داریم. به چند طریق می‌توان آن‌ها را در یک ردیف چید به گونه‌ای که مهرهٔ سمت راست هر مهرهٔ آبی، مهره‌ای قرمز باشد؟**

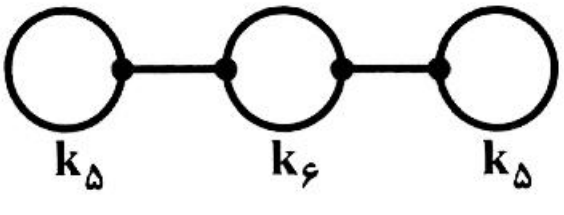
۱) $\binom{11}{4}$

۲) $\binom{12}{4}$

۳) $\binom{12}{5}$

۴) $\binom{11}{5}$

۱۱۰- **تعداد تطابق‌های کامل گراف زیر کدام است؟ (منظور از یال بین k_5 و k_6 یعنی یکی از رئوس k_5 به یکی از رئوس k_6 وصل است.)**



۱) ۴×۶^۲

۲) ۴۸

۳) ۲۷

۴) ۰

جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل:

۱۱۱- فرض کنید در حل یک دستگاه معادلات خطی $Ax = b$، داده‌های مسئله (A و b)، ۱۰ رقم دهدهی قابل اعتماد دارند و محاسبات مربوط به حل دستگاه در ماشینی با ۱۵ رقم دهدهی برای نمایش اعداد حقیقی صورت می‌گیرد. اگر عدد حالت ماتریس A برابر با 10^4 باشد، آن‌گاه تعداد ارقام دهدهی قابل اعتماد در $\bar{x}$ جواب محاسبه شده برای دستگاه حداکثر برابر است با .....

۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۱۱ ۴) ۱۵

۱۱۲ فرض کنید $H = I - \frac{uu^T}{\beta}$، که در آن $\beta = \frac{1}{2}\|u\|_2^2$ و $u \in R^n$. به‌ازای $x \in R^n$، مقدارهای Hx و $x^T H$ را می‌توان به‌صورت کارا به‌ترتیب با ..... عملیات اصلی محاسبه کرد.

۱) $O(n)$ و $O(n^2)$ ۲) $O(n^2)$ و $O(n^2)$

۳) $O(n)$ و $O(n^2)$ ۴) $O(n)$ و $O(n)$

۱۱۳ فرض کنید دستگاه خطی $Ax = b$، با روش حذف گاوسی همراه با محورگزینی پاره‌ای (سطری) حل و جواب $\bar{x}$ محاسبه شده است. ماندهٔ دستگاه در $\bar{x}$ را $r = b - A\bar{x}$ بگیرید. در این صورت، می‌توان انتظار داشت که .....

۱) $\|r\|$ نسبتاً کوچک باشد و $\bar{x}$ خطای نسبتاً بزرگ داشته باشد.

۲) $\bar{x}$ خطای نسبتاً بزرگ داشته باشد و $\|r\|$ نسبتاً بزرگ باشد.

۳) $\bar{x}$ خطای نسبتاً کوچک داشته باشد حتی اگر A بدحالت باشد.

۴) $\bar{x}$ جواب دقیق دستگاه $\bar{A}x = \bar{b}$ باشد که $\bar{A}$ به A و $\bar{b}$ به b نسبتاً نزدیک هستند.

۱۱۴- فرض کنید A یک ماتریس ناتکین است و $A = USV^T$، که در آن U و V ماتریس‌های متعامد نرمال و S قطری است. گزینهٔ صحیح در مورد عدد حالت A در نرم اقلیدسی کدام است؟ (فرض کنید برای درایه‌های قطری S داریم: $s_{ii} = i^2$ ، $i = 1, ..., n$)

۱) ۱ ۲) n^2

۳) n ۴) $\frac{1}{n^2}$

۱۱۵- فرض کنید A یک ماتریس متقارن و ناتکین است و داریم $A = QR$ که در آن Q یک ماتریس متعامد نرمال و R یک ماتریس بالا مثلثی است. گزینه صحیح کدام است؟

۱) $A^T = R^T Q$. ۲) $A^{-1} = R^{-1} Q$.

۳) $R^{-1} = QR^{-T} Q$. ۴) $R = QRQ$.

۱۱۶ روش چولسکی برای مثلثی کردن یک ماتریس متقارن و معین مثبت در مقایسه با روش حذف گاوسی با محورگزینی برای ماتریس‌ها، .....

۱) پایدار است ولی کندتر. ۲) هم پایدار است و هم سریع‌تر.

۳) ممکن است پایدار نباشد ولی سریع‌تر است. ۴) نه پایدار است و نه سریع‌تر.

۱۱۷- حل مسئلهٔ کم‌ترین مربعات به‌صورت $\min \left\| A^T y + b \right\|_2$ مدنظر است. جواب این مسئله را می‌توان با حل مسئلهٔ $\min P(y)$ با $P(y) = \ldots$ به‌دست آورد.

۱) $y^T AA^T y - y^T Ab$
۲) $y^T AA^T y - 2y^T Ab$
۳) $\frac{1}{2}(y^T AA^T y + 2y^T Ab)$
۴) $\frac{1}{2}(y^T AA^T y + y^T Ab)$

۱۱۸- فرض کنید مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی (P) به‌صورت

$$\begin{aligned} \min Z &= c^T x \\ \text{s.t.} \quad Ax &= b \qquad (P) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

بی‌کران است. قید جدیدی به مسألهٔ (P) اضافه کنید و مسألهٔ جدید را $(\overline{P})$ بنامید. گزینهٔ صحیح در مورد مسألهٔ $(\overline{P})$ کدام است؟

۱) بی‌کران است.
۲) شدنی است و جواب بهینه دارد.
۳) نمی‌تواند جواب بهینه داشته باشد.
۴) می‌تواند ناشدنی یا جواب بهینه داشته یا بی‌کران باشد.

۱۱۹- دوگان مسألهٔ .....

$$\begin{aligned} \min Z &= x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

۱) ناشدنی است.
۲) بی‌کران است.
۳) شدنی است و جواب بهینه دارد.
۴) یا جواب بهینه دارد یا بی‌کران است.

۱۲۰- مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی (P) را به‌صورت

$$\begin{aligned} \min Z &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 &\leq 1 \qquad (P) \\ ax_1 + ax_2 &\leq a \\ x_i &\geq 0 \;,\; i = 1, \ldots, 4 \end{aligned}$$

با a یک الکالر داده شده در نظر بگیرید. گزینهٔ صحیح در مورد (P) کدام است؟

۱) می‌تواند ناشدنی باشد.
۲) جواب بهینه دارد.
۳) بی‌کران است.
۴) دوگان (P) شدنی است.

۱۲۱- فرض کنید A یک ماتریس و c یک بردار است و داریم:

$$Ax \leq 0 \Rightarrow c^T x \leq 0.$$

در این‌صورت، u وجود دارد به‌طوری‌که .....

۱) $A^T u > c$
۲) $u \geq 0 \;,\; A^T u = c$.
۳) $A^T u < c$
۴) $u \leq 0 \;,\; A^T u = c$.

۱۲۲ مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی (P) را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\min Z = b^T x$$
$$\text{s.t.} \quad A^T x \geq 0 \qquad (P)$$
$$x \leq 0$$

دستگاه $u \leq 0, Au \leq b$ .....

۱) جواب ندارد. ۲) جواب دارد.

۳) جواب ندارد، اگر $b > 0$. ۴) جواب ندارد اگر و تنها اگر (P) بی‌کران باشد.

۱۲۳- مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی (P) را به‌صورت

$$\min Z = c^T x$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = 0 \qquad (P)$$
$$L \leq x \leq U$$

در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. گزینه صحیح کدام است؟

۱) (D) می‌تواند ناشدنی باشد.

۲) (D) می‌تواند بی‌کران باشد.

۳) (P) همواره جواب بهینه دارد و (D) همواره شدنی است.

۴) (D) شدنی است ولی(P) می‌تواند ناشدنی باشد.

۱۲۴- فرض کنید مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی (P) به‌صورت

$$\min Z = c^T x$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b \qquad (P)$$
$$x \geq 0$$

جواب بهینه دارد. قیدی از مسألهٔ $(\overline{P})$ را حذف کنید و مسألهٔ جدید را $(\overline{P})$ بنامید. دوگان $(\overline{P})$.....

۱) یا ناشدنی است یا جواب بهینه دارد. ۲) جواب بهینه دارد.

۳) می‌تواند بی‌کران باشد. ۴) یا بی‌کران است یا جواب بهینه دارد.

۱۲۵ مسألهٔ (P) را به‌صورت

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \,, \quad i = 1,\ldots,m \quad (1)$$

$$(P) \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \,, \quad j = 1,\ldots,n \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \,, \; i = 1,\ldots,m \,, \; j = 1,\ldots,n$$

در نظر بگیرید. متغیرهای دوگان مربوط به قیدهای i ام در (۱) و j ام در (۲) را به‌ترتیب u_i و v_j بگیرید. فرض کنید x و (u, v) به‌ترتیب جواب‌های بهینه برای (P) و دوگان آن هستند. گزینهٔ صحیح کدام است؟

۱) $u_i + v_j = c_{ij} \Rightarrow x_{ij} > 0$ ۲) $u_i + v_j \neq c_{ij} \Rightarrow x_{ij} = 0$

۳) $u_i + v_j = c_{ij} \Leftrightarrow x_{ij} = 0$ ۴) $x_{ij} = 0 \Rightarrow u_i + v_j < c_{ij}$

۱۲۶ کدام گزینه درباره معادله دیفرانسیل $x'(t)=\sqrt[۴]{x(t)^۳}$ با شرط اولیه $x(۰)=۰$ بر بازه $[۰,۲]$ درست است؟

۱) جواب یکتا دارد.

۲) جواب ندارد.

۳) تعداد نامتناهی جواب دارد.

۴) جواب یکتا ندارد ولی تعداد جواب‌ها متناهی است.

۱۲۷- بازه ماکسیمال جواب معادله زیر کدام است؟

$$x'(t)=-\frac{۱}{۲x(t)}\ ;\ x(۰)=۱$$

۱) $(۱,+\infty)$

۲) $(-\infty,۰)$

۳) $(-\infty,۱)$

۴) $(۰,+\infty)$

۱۲۸- کدام گزینه دربارهٔ معادلهٔ زیر درست است؟

$$\begin{cases} x_۱'(t)=\left(\frac{۱}{۱+t^۲}-۵\right)x_۱(t)+\left(\frac{\sin t}{t}+۶\right)x_۲(t) \\ x_۲'(t)=\left(e^{-t}-۳\right)x_۱(t)+\left(\frac{\ell n(۱+t^۲)}{t}-۴\right)x_۲(t) \end{cases}$$

۱) هر جواب معادله بی‌کران است.

۲) معادله حداقل یک جواب متناوب دارد.

۳) معادله حداقل یک جواب بی‌کران دارد.

۴) به‌ازای هر جواب $X(۱)=(x_۱(۱)\ ,\ x_۲(۱))$ از معادله $\lim_{t\to+\infty} X(t)=(۰,۰)$

۱۲۹ ماتریس اساسی معادله زیر کدام است؟

$$\begin{cases} x_۱'(t)=۰ \\ x_۲'(t)=۴t\,x_۱(t)-۶t\,x_۲(t) \end{cases}$$

۱) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ \frac{۳}{۲}e^{-۳t} & e^{-۳t} \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۳e^{۲t} & ۲e^{-۳t} \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ e^{۲t} & e^{-۳t} \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ \frac{۲}{۳}e^{۳t} & e^{۳t} \end{bmatrix}$

۱۳۰- کدام دنباله بازگشتی از توابع به جواب معادله زیر بر بازه $\left[\frac{۱}{۴},\frac{۷}{۴}\right]$ همگرا است؟

$$x(t)x'(t)=t \ , \ x(۱)=\frac{۱}{۲}$$

۱) $u_۰(t)=۱ \ , \ \forall n\in\mathbb{N}: u_n(t)=۱+\int_۱^t \frac{s}{u_{n-۱}(s)}ds$

۲) $u_۰(t)=\frac{۱}{۲} \ , \ \forall n\in\mathbb{N}: u_n(t)=\frac{۱}{۲}+\int_۱^t \frac{s}{u_{n-۱}(s)}ds$

۳) $u_۰(t)=\frac{۱}{۲} \ , \ \forall n\in\mathbb{N}: u_n(t)=\frac{۱}{۲}+\int_۱^t ۳u_{n-۱}(s)ds$

۴) $u_۰(t)=۱ \ , \ \forall n\in\mathbb{N}: u_n(t)=۱+\int_۱^t ۳u_{n-۱}(s)ds$

احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی۱:

۱۳۱- کیسه‌ای شامل تعدادی تاس است. ۲۰٪ تاس‌ها چهاروجهی، ۵۰٪ آن‌ها شش‌وجهی و ۳۰٪ مابقی هشت‌وجهی است. تمام وجه‌ها شماره‌گذاری شده‌اند. به تصادف تاسی از این کیسه خارج و پرتاب می‌کنیم. اگر X شماره وجه ظاهر شده باشد، $E(X)$ کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۳/۶

۳) ۳/۷ ۴) ۳/۸

۱۳۲- فرض کنید X دارای تابع چگالی $f(x)=ke^{-ax}(۱-e^{-ax})I_{(۰,\infty)}(x) \ , \ (a<Ln۲)$ باشد. $P(X>۱)$، کدام است؟ ($I_{(.)}(x)$ تابع نشانگر است.)

۱) $۲e^{-a}-e^{-۲a}$ ۲) $\frac{۱}{۲a}(۲e^{a}-e^{۲a})$

۳) $۲e^{۲a}-e^{a}$ ۴) $\frac{۱}{۲a}(۲e^{-۲a}-e^{-a})$

۱۳۳- تجارب گذشته نشان می‌دهد که ۲۰٪ مسافرین یک قطار بلیت خود را پس می‌گیرند. اگر امروز ۲۲۵ نفر بلیط گرفته باشند، آن‌گاه تقریباً چقدر احتمال دارد که حداکثر ۶۰٪ آن‌ها بلیط خود را پس نگیرند؟

۱) صفر ۲) ۰/۵

۳) ۰/۷۵ ۴) یک

۱۳۴- یک تاس سالم ۲ بار به‌طور مستقل پرتاب می‌شود. اگر متغیر تصادفی X نشان‌دهنده تفاضل اعداد مشاهده‌شده دو پرتاب باشد، گشتاور دوم X کدام است؟

۱) $\frac{۳۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۳۵}{۶}$

۳) $\frac{۹۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۹۱}{۶}$

۱۳۵- اگر $X \sim U(0,1)$، امید ریاضی و چارک اول توزیع تصادفی $Y = \frac{X}{1+X}$، به‌ترتیب کدامند؟

۱) $\frac{1}{5}, 1-\ln 3$ ۲) $\frac{3}{7}, 1-\ln 2$

۳) $\frac{1}{5}, 1-\ln 2$ ۴) $\frac{3}{7}, 1-\ln 3$

۱۳۶- فرض کنید X، Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند که $X \sim B(5, \frac{1}{3})$ و $Y \sim B(10, \frac{2}{3})$ است. $P(X=Y)$، کدام است؟

۱) $\binom{20}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ ۲) $\binom{15}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^5$

۳) $\binom{20}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^{15}$ ۴) $\binom{15}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^5$

۱۳۷- فرض کنید X_4, X_3, X_2, X_1 یک نمونه تصادفی ۴ تایی از توزیع $U(0,1)$ باشد به‌طوری‌که $X_{(1)}$ کوچکترین و $X_{(4)}$ بزرگترین آمارهٔ ترتیبی باشد، مقدار $P(X_{(1)} + X_{(4)} \le 1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۳۸- آزمون زبانی در اول هر ماه برگزار می‌شود، شانس موفقیت برای هر دانشجو در این آزمون p است. اگر n نفر به‌طور هم‌زمان در این امتحانات شرکت کنند، احتمال اینکه اولین دانشجوی موفق، حداکثر ۴ بار امتحان داده باشد، کدام است؟

۱) q^{4n} ۲) q^{5n}

۳) $1-q^{4n}$ ۴) $1-q^{5n}$

۱۳۹- اگر $(X,Y) \sim N_2(5,5,25,25,0)$، آن‌گاه $P\left[X^2+Y^2-10(X+Y)>25\right]$، کدام است؟

۱) e^{-1} ۲) $e^{-\frac{3}{2}}$

۳) e^{-2} ۴) $e^{-\frac{1}{2}}$

۱۴۰- تابع مولد گشتاورهای سه متغیر تصادفی X_1, X_2, X_3 به‌صورت زیر است. مقدار $E(X_1 \mid X_2 = 3)$، کدام است؟

$$M_{X_1,X_2,X_3}(t_1,t_2,t_3) = \left[\frac{1}{9}e^{t_1} + \frac{2}{9}e^{t_2} + \frac{3}{9}e^{t_3} + \frac{1}{3}\right]^{10}$$

۱) $\frac{7}{9}$ ۲) ۱

۳) $\frac{10}{9}$ ۴) ۲

۱۴۱- فرض کنید X,Y دو متغیر تصادفی از توزیع نرمال دومتغیره باشند، به قسمی که $E(X|Y=y)=\frac{۱}{۱۶}y-۳$, $Var(X)=۱$, $E(Y|X=x)=۴x+۳$. مقدار $E(Var(Y|X=x))$ کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۶۴

۳) $\frac{۱}{۶۴}$ ۴) ۱۶

۱۴۲- فرض کنید X یک متغیر تصادفی حقیقی مقدار مثبت $(\mathbb{R}^+)$ و $E(X^۲)<\infty$ باشد، در این‌صورت به ازای هر $۰<a<۱$ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(۱-a)E(X)\le E(XI_{\{X\ge aE(X)\}})$ ۲) $P(X\ge aE(X))\ge (۱-a)^۲\frac{E^۲(X)}{E(X^۲)}$

۳) $E(X)\le E(XI_{\{X\ge aE(X)\}})$ ۴) $P(X\ge aE(X))\le \frac{E(X^۲)}{a^۲E^۲(X)}$

۱۴۳- فرض کنید $X\sim U(۰,۱)$, $Y=\begin{cases}۱ & X\ge a\\ ۰ & X<a\end{cases}$. ماکسیمم مقدار ضریب همبستگی X و Y کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۴۴- فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی nتایی از تابع توزیع $F(x)=۱-x^{-۲}$, $x>۱$ باشد، توزیع حدی $Y_n=\frac{۱}{\sqrt{n}}X_{(n)}$ که در آن $X_{(n)}$ بزرگترین آماره ترتیبی است، کدام است؟

۱) $F_Y(y)=e^{-\frac{۱}{y^۲}}$, $y>۰$ ۲) $F_Y(y)=۱-\frac{۱}{y}$, $y\ge ۱$

۳) $F_Y(y)=۱-e^{-y}$, $y\ge ۰$ ۴) تباهیده در نقطه ۱

۱۴۵- اگر $\{X_n, n\ge ۰\}$ یک زنجیر مارکوف با توزیع اولیه $P(X_۰=k)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^k$, $k=۱,۲,\dots$ و احتمالات تغییر وضعیت $P_{۱۱}=P_{۱۲}=\frac{۱}{۲}$, $P_{j۱}=\frac{۱}{j+۱}$, $P_{jj+۱}=\frac{j}{j+۱}$ $(j\ge ۲)$. آن‌گاه $P(X_۱=۱)$ کدام است؟

۱) $۲\ln ۲-۱$

۲) $\ln ۲-\frac{۱}{۲}$

۳) $\ln ۲-۱$

۴) $\frac{\ln ۲-۱}{۲}$

۱۴۶- زنجیر مارکوف با فضای وضعیت $\{1,2,3\}$ و ماتریس احتمال انتقال زیر را درنظر بگیرید. توزیع مانای این زنجیر کدام است؟

$$P=\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰/۵ & ۰ \\ ۰/۲۵ & ۰/۵ & ۰/۲۵ \\ ۰ & ۰/۵ & ۰/۵ \end{bmatrix}$$

۱) $\left(\frac{۲}{۹},\frac{۵}{۹},\frac{۲}{۹}\right)$

۲) $\left(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲}\right)$

۳) $\left(\frac{۲}{۹},\frac{۲}{۹},\frac{۵}{۹}\right)$

۴) $\left(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴}\right)$

۱۴۷- تعداد هواپیماهایی که از یک فرودگاه کوچک پرواز می‌کنند از فرایند پوآسون با نرخ ۲۴ فروند در یک روز کاری ۸ ساعتی پیروی می‌کند. اگر در یک روز کاری ۲۰ پرواز از این فرودگاه انجام شده باشد، احتمال اینکه حداکثر یکی از آن‌ها در دو ساعت اول روز انجام گرفته چقدر است؟

۱) $\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱۹}\times\frac{۲۴}{۴}$

۲) $\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲۰}\times\frac{۲۳}{۴}$

۳) $\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۱۹}\times\frac{۲۳}{۴}$

۴) $\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲۰}\times\frac{۲۴}{۴}$

۱۴۸ فرض کنید در یک ناحیه اگر روزی ابری باشد آن‌گاه با احتمال مساوی روز بعد ابری یا آفتابی است و اگر روزی آفتابی باشد با احتمال $\frac{۱}{۳}$ روز بعد ابری و با احتمال $\frac{۲}{۳}$ آفتابی خواهد بود. اگر امروز ابری باشد احتمال اینکه سه روز دیگر هوا ابری باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۲۹}{۷۲}$

۲) $\frac{۲۹}{۱۴۴}$

۳) $\frac{۴۳}{۷۲}$

۴) $\frac{۱۱۵}{۱۴۴}$

۱۴۹- شخصی از اول فروردین تا پایان شهریور هر سال براساس یک فرایند پوآسون با نرخ هر ۶ هفته یک‌بار دچار آلرژی می‌شود. احتمال اینکه در یک سال حداقل یک‌بار تا قبل از شروع تیر و حداقل یک‌بار بعد از شروع تیر دچار آلرژی شود چقدر است؟

۱) $۲(۱-e^{-۲})(۱-e^{-۱})$

۲) $(۱-e^{-۲})^۲$

۳) $(۱-e^{-۱})^۲$

۴) $(۱-e^{-۲})(۱-e^{-۱})$

۱۵۰- در یک فرایند شاخه‌ای، فرض کنید X_n اندازه جمعیت در نسل n ام و μ میانگین افراد تولید شده توسط یک عضو در این جمعیت باشد و قرار دهید $X_۰ = ۱$. اگر $E(X_m^۲) = ۱$، دراین صورت $E(X_m X_n)$ کدام گزینه است؟ $(m \le n)$

۱) μ^n

۲) $\mu^۲$

۳) μ^m

۴) μ^{n-m}