کد کنترل

131

F

131F

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

صبح پنج‌شنبه
۹۷/۲/۶

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی‌ارشد ناپیوستهٔ داخل ـ سال ۱۳۹۷

مجموعه ریاضی ـ کد (۱۲۰۸)

تعداد سؤال: ۱۵۰

مدت پاسخگویی: ۲۵۵ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شمارهٔ سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شمارهٔ	تا شمارهٔ
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضیات عمومی (۱ و ۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۴۰	۳۱	۷۰
۳	آنالیز ریاضی	۲۰	۷۱	۹۰
۴	مبانی جبر و مبانی ترکیبیات	۲۰	۹۱	۱۱۰
۵	جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل	۲۰	۱۱۱	۱۳۰
۶	احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی	۲۰	۱۳۱	۱۵۰

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

❋ داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به‌منزلهٔ عدم حضور شما در جلسهٔ آزمون است.

اینجانب ..... با شمارهٔ داوطلبی ..... در جلسهٔ این آزمون شرکت می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary

***Directions:** Choose the word or the phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.*

1- Fierce winds and deadly waves were only one ---------- many explorers like Christopher Columbus confronted when sailing to unknown lands.
1) suspension 2) obstacle 3) shortage 4) variation

2- In urban desert areas potable water supplies are stressed by increasing demands that leave water managers ---------- to find new supplies.
1) discouraging 2) refusing 3) invading 4) struggling

3- The sense of smell diminishes with advancing age—much more so than the sensitivity to taste. This ---------- may result from an accumulated loss of sensory cells in the nose.
1) decrease 2) merit 3) ambiguity 4) defense

4- True, all economic activities have environmental consequences. Nevertheless, the goal of shrimp producers should be to reduce the ---------- effects on the environment as much as possible.
1) indigenous 2) competitive 3) deleterious 4) imaginary

5- Like most successful politicians, she is pertinacious and single-minded in the ---------- of her goals.
1) pursuit 2) discipline 3) permanence 4) involvement

6- Knowing that everyone would ---------- after graduation, she was worried that she would not see her friends anymore.
1) emerge 2) conflict 3) differentiate 4) diverge

7- Certain mental functions slow down with age, but the brain ---------- in ways that can keep seniors just as sharp as youngsters.
1) composes 2) conveys 3) compensates 4) corrodes

8- It is argued by some that hypnosis is an effective intervention for ---------- pain from cancer and other chronic conditions.
1) displacing 2) alleviating 3) exploring 4) hiding

9- Children who get ---------- atmosphere at home for studies perform better than students who are brought up under tense and indifferent family atmosphere.
1) favorable 2) valid 3) obedient 4) traditional

10- The post office has promised to resume first class mail ---------- to the area on Friday.
1) attention 2) progress 3) expression 4) delivery

PART B: Cloze Passage
Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Colette began painting while she was still in her youth. (11) ---------- 1970, she completed her first performance with *Hommage a Delacroix*, (12) ---------- was the beginning of an artistic career (13) ---------- to the oneness of art and life. (14) ----------, actions and performances on streets and public squares, followed by her "living environments" and the "windows", (15) ---------- in a selected pose with an elaborate arrangement of fabrics and lace.

11- 1) Since the year 2) During a year of
3) For a year of 4) In the year
12- 1) that it 2) which 3) that 4) it
13- 1) devoted 2) was devoted 3) to devote 4) devoting
14- 1) Street works then came 2) Then came street works
3) There coming then street works with 4) With street works then to come
15- 1) she remained motionless 2) that in there she remained motionless
3) in which she remained motionless 4) that in it motionless she remained

PART C: Reading Comprehension:
Directions: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

PASSAGE 1:

The history of nonsmooth (not necessarily differentiable) analysis is quite short but very intense. The classical theory of optimization has always been connected to differentiation and strong regularity assumptions. However, these assumptions are often too demanding for practical applications, due to the "nonsmoothness" of natural phenomena. But necessity is the mother of invention: typically these nonsmooth problems are approximated by smooth ones and the developed theory is applied to them. This approach, however, causes other difficulties in the form of approximation errors, since the approximations may be too rough. This difficulty was one initiator of the theory of nonsmooth analysis.

Everyone who has dealt with optimization knows that convexity is a pleasant property and that optimization has a very clear geometrical interpretation. Thus it was natural that the theory was first developed for convex functions and the treatment was quite geometrical. In optimization theory the meaning of differentiation is to locally linearize the given differentiable function in the sense that the hyperplane generated by the gradient is the tangent plane of the graph of the function. For convex functions

these linearizations are always lower approximations. We get a lower piecewise linear approximation by taking a maximum over the linearizations defined at several points and by taking the maximum over all points we get the original convex differentiable function. These ideas were generalized for nonsmooth convex functions by defining the concepts of subgradient and subdifferential. A subgradient at a fixed point is a vector which has the property that the hyperplane at that point generated by the vector is a lower approximation to the function; the set of all subgradients at that point is called subdifferential. These new concepts made it possible to obtain the same approximation properties as in the smooth case.

16- Which word best gives the meaning of the underlined word "rough" in the first paragraph?

1) Inadequate 2) Hasty 3) Hard 4) Illogical

17- Approximation of nonsmooth problems by smooth problems is expected to lead to ----------.

1) minor errors
2) major errors
3) no difficulty
4) inappropriate applications

18- In optimization, convexity ----------.

1) causes certain difficulties
2) is a desirably useful property
3) misappropriates approximation
4) has no geometric interpretation

19- Similar approximation properties due to the smooth case is obtained for the nonsmooth convex optimization because of ----------.

1) convexity
2) rough approximations
3) using results from graph theory
4) notions of subgradient and subdifferential

20- Subdifferential and subgradient are ----------.

1) unrelated concepts
2) concepts introduced to analyze smooth optimization problems
3) concepts developed for analysis of rough approximations
4) terms used to define vectors having certain analytic properties for nonsmooth optimization problems

PASSAGE 2:

Linear algebra and matrix theory are essentially synonymous terms for an area of mathematics that has become one of the most useful and pervasive tools in a wide range of disciplines. It is also a subject of great mathematical beauty. In consequence of both of these facts, linear algebra has increasingly been brought into lower levels of the curriculum, either in conjunction with the calculus or separate from it but at the same level. A large and still growing number of textbooks has been written to satisfy this need, aimed at students at the junior, sophomore, or even freshman levels. Thus, most students now obtaining a bachelor's degree in the sciences or engineering have had some exposure to linear algebra. But rarely, even when solid courses are taken at the junior or senior levels, do these students have an adequate working knowledge of the subject to be useful in graduate work or in research and development activities in government and industry. In particular, most elementary courses stop at the point of

canonical forms, so that while the student may have "seen" the Jordan and other canonical forms, there is usually little appreciation of their usefulness. And there is never time in the elementary courses to deal with more specialized topics like nonnegative matrices, inertia theorems, and so on.

In consequence, many graduate courses in mathematics, applied mathematics, or applications develop certain parts of matrix theory as needed. At Virginia, we have long had a first semester course in linear algebra for incoming applied mathematics graduate students, a course that is also taken by a number of students in various engineering disciplines. There has been a continuing problem with suitable textbooks at this level. The ones designed for undergraduates are too elementary and incomplete, and the more advanced books are not sufficiently applied, too difficult to read, too specialized, or out-of-print. Hence, the course has been taught primarily from lecture notes, which are the basis for this book.

21- Which word best describes the meaning of the underlined word "synonymous" in the first line?

1) Useful 2) Beautiful 3) Similar 4) Pervasive

22- Matrix theory ----------.

1) has complicated problem statements in mathematics
2) is both practically useful and mathematically beautiful
3) is a generalization of linear algebra with essentially no attractiveness
4) although mathematically beautiful, has limited applications

23- The term "canonical form" ----------.

1) is useful
2) has no usefulness
3) is inappropriately used in linear algebra
4) is not appreciated in linear algebra

24- Linear algebra courses at the undergraduate level are ---------- the one at the graduate level.

1) repeated versions of
2) more applied than
3) less applied than
4) not properly designed as compared to

25- For applied mathematics graduate students at Virginia, linear algebra ----------.

1) is taught by using lecture notes
2) is taught too late in the program
3) cannot be taught because appropriate textbooks are not available
4) is taught by experts from engineering disciplines

PASSAGE 3:

The arrival of high-speed digital computers has also played a major role in the development of the science of decision making. Computers have inspired the development of larger systems and the coupling of previously separate systems, thereby resulting in decision and control problems of correspondingly increased complexity. At the same time, however, computers have revolutionized applied mathematics and solved many of the complex problems they generated. It is perhaps

natural that the concept of best or optimal decisions should emerge as the fundamental approach for formulating decision problems. In this approach a single real quantity, summarizing the performance or value of a decision, is isolated and optimized (i.e., either maximized or minimized depending on the situation) by proper selection among available alternatives. The resulting optimal decision is taken as the solution to the decision problem. This approach to decision problems has the virtues of simplicity, preciseness, elegance, and, in many cases, mathematical tractability. It also has obvious limitations due to the necessity of selecting a single objective by which to measure results. But optimization has proved its utility as a mode of analysis and is firmly entrenched in the field of decision making.

26- Computers ----------.

1) are insignificantly useful for decision making
2) have generated the science for revolutionary thinking
3) caused many complicated problems in applied mathematics
4) play an important role in solving complex problems in applied mathematics

27- The word "alternative" in line 11 means ----------.

1) choices 2) subjects 3) objects 4) variations

28- Optimization ----------.

1) has complicated decision making
2) is inappropriate for decision making
3) is utilized in decision making
4) contributes to simplification of complicated problems

29- A solution to a decision problem ----------.

1) may be either optimal or elegant
2) is constructed by solving an optimization problem
3) must be simple and precise but may not be an optimal solution
4) may be constructed by a combination of alternative decisions

30- Optimizing a single objective ----------.

1) is meaningless
2) has its own limitations
3) is not proper for decision making
4) is the only approach to decision making

دروس پایه(ریاضیات عمومی (۱ و ۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۳۱- اگر f تابعی فرد باشد و $\lim_{x\to 0^+} f(x) = a$ ، آنگاه مقدار $\lim_{x\to 0^-}\left(f(-xe^{-x}) + f(x^3 - x^5) + f(x^4 - x^2)\right)$ کدام است؟

۱) a
۲) $-3a$
۳) $-a$
۴) $3a$

۳۲- کدام سری همگرا است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n+e^n}$

۳۳- اگر تابع f در معادلهٔ $\cos(f(x)) + \frac{8}{\pi^3}(f(x))^3 + 2f(x) = 1 + x$ صدق کند، آنگاه مقدار $2f'(0) + f'(\pi)$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{\pi+6}$

۲) $\frac{\pi+6}{2\pi+6}$

۳) $\frac{\pi+6}{\pi}$

۴) $\frac{2\pi+6}{\pi+6}$

۳۴- اگر $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+n^2)x^n$ ، آنگاه $f(\frac{1}{2})$ کدام است؟

۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۱

۳۵- مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ و محور xها در بازه $[1, e^2]$ کدام است؟

۱) ۵

۲) ۴

۳) ۳

۴) ۲

۳۶- طول منحنی $f(x)=\int_{1}^{x}\sqrt{t^{4}-1}\,dt$ در بازهٔ $[1,3]$ کدام است؟

۱) $\frac{19}{3}$

۲) $\frac{25}{3}$

۳) $\frac{26}{3}$

۴) $\frac{28}{3}$

۳۷- کوتاه‌ترین فاصله بیضی به معادلهٔ $x^{2}+xy+y^{2}=12$ تا مبدأ مختصات کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$

۲) $2\sqrt{6}$

۳) ۴

۴) $2\sqrt{2}$

۳۸- مقدار $\int_{0}^{1}\int_{x^{2}}^{x}(x^{2}+y^{2})^{-\frac{1}{2}}dydx$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}-1$

۲) $2\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{2}$

۴) $1+\sqrt{2}$

۳۹- حجم جسم محصور به استوانه $x^{2}+z^{2}=9$ و صفحات $x-y+z+4=0$ و $x-y+z=0$ کدام است؟

۱) 72π

۲) 36π

۳) 18π

۴) 9π

۴۰- اگر C منحنی فصل مشترک رویه‌های $x+y=2a$ و $x^{2}+y^{2}+z^{2}-2ax-2ay=0$ در جهت راستگرد، مقدار $\oint_{C}ydx+zdy+xdz$ کدام است؟

۱) $-2\sqrt{2}\pi a^{2}$

۲) $-\sqrt{2}\pi a^{2}$

۳) $\sqrt{2}\pi a^{2}$

۴) $2\sqrt{2}\pi a^{2}$

۴۱- مقدار جواب معادله $yy'' = y^۲y' + (y')^۲$ با شرایط اولیه $y(۰) = ۱$ و $y'(۰) = ۲$ در $x = ۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{e}{e+۲}$

۲) $\frac{e}{e-۲}$

۳) $\frac{e}{e+۲}$

۴) $-\frac{e}{e-۲}$

۴۲- مقدار جواب معادله $y'' - ۴y' + ۵y = e^{۲x}\cos x$ با شرایط اولیه $y(\frac{\pi}{۲}) = ۰$ و $y(۰) = ۱$ در $x = \frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{\frac{\pi}{۲}}(۱+\frac{\pi}{۴})$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{\frac{\pi}{۲}}(۱-\frac{\pi}{۸})$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{\frac{\pi}{۲}}(۱+\frac{\pi}{۸})$

۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}e^{\frac{\pi}{۲}}(۱-\frac{\pi}{۴})$

۴۳- ریشه‌های معادله شاخص معادله $x^۲(x+۱)y'' + x(x-۴)y' + ۴y = ۰$ در $x = ۰$ کدام است؟

۱) $r_۱ = -۱ , r_۲ = ۴$

۲) $r_۱ = ۱ , r_۲ = -۴$

۳) $r_۱ = ۱ , r_۲ = ۴$

۴) $r_۱ = -۱ , r_۲ = -۴$

۴۴- جواب عمومی دستگاه $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + ۲y + t - ۱ \\ \frac{dy}{dt} = ۳x + ۲y - ۵t - ۲ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\begin{cases} x = c_۱e^{۴t} + c_۲e^{-t} + ۳t - ۲ \\ y = \frac{۳}{۲}c_۱e^{۴t} - c_۲e^{-t} - ۲t + ۳ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} x = ۲c_۱e^{۴t} + c_۲e^{-۲t} + ۳t - ۲ \\ y = ۳c_۱e^{۴t} - c_۲e^{-۲t} - ۲t + ۳ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} x = c_۱e^{۴t} + c_۲e^{-t} - ۳t + ۲ \\ y = \frac{۳}{۲}c_۱e^{۴t} - c_۲e^{-t} + ۲t - ۳ \end{cases}$

۴) $\begin{cases} x = ۲c_۱e^{۴t} + c_۲e^{-۲t} - ۳t + ۲ \\ y = ۳c_۱e^{۴t} - c_۲e^{-۲t} + ۲t - ۳ \end{cases}$

۴۵- فرض کنید تابع $y = y(x)$ در معادله انتگرال $y(x) = x + e^x \int_0^x y(t)e^{-t}dt$، صدق کند. $y(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$

۲) $\frac{1}{4}(e^2 - 1)$

۳) $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$

۴) $\frac{1}{2}(e^2 + 1)$

۴۶- فرض کنید $f : X \to Y$ تابع باشد و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$. کدام گزینه درست است؟

۱) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

۲) $f(A \cup f^{-1}(B)) = f(A) \cup B$

۳) $f^{-1}(f(A) \cap B) = A \cap f^{-1}(B)$

۴) $f^{-1}(f(A) \cup B) = A \cup f^{-1}(B)$

۴۷- فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع با خاصیت زیر باشد:

$$\forall A, B \subseteq X \left(A \cap B = \phi \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \phi\right)$$

کدام گزینه درست است؟

۱) تابع f پوشا است ولی لزوماً یک به یک نیست.

۲) تابع f یک به یک است ولی لزوماً پوشا نیست.

۳) تابع f یک به یک و پوشا است.

۴) تابع f لزوماً یک به یک و پوشا نیست.

۴۸- فرض کنید S، R و T رابطه‌های دوتایی در مجموعه ناتهی A هستند. کدام گزینه درست است؟

۱) $T \circ (R \cap S) = (T \circ R) \cap (T \circ S)$

۲) $T \circ (R - S) = (T \circ R) - (T \circ S)$

۳) $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$

۴) $(R - S) \circ T = R \circ T - S \circ T$

۴۹- فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، $A \subseteq \mathbb{R}$ و $f : A \to \mathbb{R}$ تابع باشد. فرمول منطقی گزارهٔ زیر کدام گزینه است؟

در گزینه‌های زیر ε و δ مقید به اعداد مثبت، L مقید به اعداد حقیقی و a مقید به اعضای A است.

تابع f در هیچ نقطه‌ای از A حد ندارد.

۱) $\forall a \forall L \exists \varepsilon \exists \delta \exists x (x \in A \wedge |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon)$

۲) $\forall a \forall L \exists \varepsilon \forall \delta \forall x (x \in A \wedge |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| \geq \varepsilon)$

۳) $\forall a \forall L \forall \varepsilon \exists \delta \exists x (x \in A \wedge |x - a| < \varepsilon \wedge |f(x) - L| \geq \delta)$

۴) $\forall a \forall L \exists \delta \forall \varepsilon \exists x (x \in A \wedge |x - a| < \varepsilon \wedge |f(x) - L| \geq \delta)$

۵۰- فرض کنید $A \prec B$ به این مفهوم است که A با زیر مجموعه‌ای از B هم‌عدد (هم ارز) است ولی B با هیچ زیر مجموعه‌ای از A هم‌عدد (هم ارز) نیست. اگر $B \prec A$، کدام گزینه درست است؟

۱) هیچ تابع پوشایی از B به A وجود ندارد.

۲) هیچ تابع پوشایی از A به B وجود ندارد.

۳) یک تابع یک به یک از B به A وجود دارد.

۴) بین A و B یک تابع یک به یک و پوشا وجود دارد.

۵۱- کدام‌یک از توابع زیر از $\mathbb{R}^2$ به $\mathbb{R}^2$، یک تبدیل خطی است؟

۱) $T_1(x_1, x_2) = (x_1 x_2, x_2)$

۲) $T_2(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2 + 1)$

۳) $T_3(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 - 1, 0)$

۴) $T_4(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_1)$

۵۲- فرض کنید $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$. فضای $V^\perp$ کدام است؟ (منظور از $V^\perp$، فضای متعامد V در $\mathbb{R}^4$ است.)

۱) $\{(a, 2a, b, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$

۲) $\{(a, 2a, a, a) | a \in \mathbb{R}\}$

۳) $\{(a, 2a, b, c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$

۴) $\{(a, 2b, c, d) | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

۵۳- فرض کنید $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ که در هر سطر A، دقیقاً یک عنصر ناصفر وجود دارد و

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ (10)^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

دراین‌صورت کدام‌یک از اعداد زیر، مقدار ویژهٔ A است؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۱۰

۴) 10^{10}

۵۴- فرض کنید A ماتریسی 8×8 با درایه‌های ۱ و ۱− باشد که هر دو سطر آن برهم عمودند. دراین‌صورت قدرمطلق $\det(A)$ کدام است؟

۱) ۸

۲) 8^2

۳) 8^3

۴) 8^4

۵۵- اگر $A\in M_{10}(\mathbb{R})$ و $rank(A)\le 8$ باشد، آنگاه $rank(adj(A))$ کدام است؟

۱) ۰

۲) ۲

۳) ۸

۴) ۱۰

۵۶- اگر F و E زیرمجموعه‌های ناتهی و کران‌دار $\mathbb{R}$ باشند، $E+F=\{x+y : x\in E, y\in F\}$ و $EF=\{xy : x\in E, y\in F\}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $\sup(E+F)=\sup E+\sup F$

۲) $\sup(EF)=\sup E\cdot\sup F$

۳) اگر $E\cap F\neq\phi$ آنگاه $\sup(EUF)=\sup E+\sup F-\sup(E\cap F)$

۴) اگر $E\cap F\neq\phi$ آنگاه $\sup(E\cap F)=\sup E\cdot\sup F$

۵۷- اگر $\lim_n a_n=0$ و برای هر $n\ge 1$، $a_n-a_{n+1}\ge\frac{1}{n(n+1)}$، کدام گزینه درست است؟

۱) سری $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|a_n|}$ همگرا است.

۲) برای هر n، $a_n\ge\frac{1}{n}$

۳) سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا است.

۴) برای هر n، $a_n\le\frac{1}{n}$

۵۸- کدام گزینه نادرست است؟

۱) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ موجود است که تنها در یک نقطهٔ مشتق‌پذیر است.

۲) اگر تابع $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ دارای مشتق کراندار باشد، دنباله $\{f(\frac{1}{n})\}$ همگرا است.

۳) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ موجود است که تنها در اعداد اصم پیوسته است.

۴) تابع مشتق‌پذیر $f:[0,7]\to\mathbb{R}$ موجود است که $f'(x)=[x](0\le x\le 7)$.

۵۹- فرض کنید $f(x)=\begin{cases}x^3 & x\text{ گویا}\\ 0 & x\text{ اصم}\end{cases}$ و $a=\overline{\int_0^1}f(x)dx$ و $b=\underline{\int_0^1}f(x)dx$ به‌ترتیب انتگرال ریمان بالایی و پایینی f باشند. کدام گزینه درست است؟

۱) $a=b=0$

۲) $a=\frac{1}{4}$ ، $b=0$

۳) $a=b=\frac{1}{4}$

۴) $a=\frac{1}{4}$ ، $b=\frac{1}{5}$

۶۰- کدام گزینه نادرست است؟

۱) مجموع هر دو تابع پیوسته یکنواخت، پیوسته یکنواخت است.

۲) اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ مشتق کراندار داشته باشد، پیوسته یکنواخت است.

۳) حاصل‌ضرب هر دو تابع پیوسته یکنواخت، پیوسته یکنواخت است.

۴) اگر f در بازهٔ $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد آنگاه تابع $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته یکنواخت است.

۶۱- فرض کنید یک دستگاه معادلات خطی با روش حذفی گاوس و محورگزینی سطری در یک کامپیوتر با روند عدد یک برای نمایش اعداد حقیقی برابر با 10^{-14}، حل شود. اگر عدد حالت ماتریس ضرایب دستگاه برابر با 10^{14} باشد، آن‌گاه تعداد رقم‌های ده‌دهی قابل اعتماد در جواب به دست آمده حداکثر کدام است؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۱۳

۴) ۱۵

۶۲- برای اینکه قاعدهٔ انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای برای محاسبه $\int_0^1 (x^5-cx^4)dx$ دقیق باشد، مقدار c کدام است؟

۱) $\frac{1}{18}$

۲) $\frac{3}{10}$

۳) $\frac{1}{30}$

۴) $\frac{10}{9}$

۶۳- اگر روش نیوتن برای حل مسئله $x^2-2\sin^2 x=0$ به یک عدد مثبت x همگرا شود، آن‌گاه نرخ همگرایی مجانبی کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) p و $1<p<2$

۶۴- تابع $f(x)=2\sin 3x+3\sin 2x+x^2$ روی بازهٔ $[0,\pi]$ را با چه طول گام h باید جدول‌بندی کرد تا خطای حاصل از درون‌یابی تکه‌ای خطی از 10^{-6} بیشتر نشود؟

۱) ۰/۰۰۳

۲) ۰/۰۰۵

۳) ۰/۰۰۰۳

۴) ۰/۰۰۰۵

۶۵- دنبالهٔ حاصل از تکرار نقطـهٔ ثابـت بـه‌صـورت $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ ، $n = ۰,۱,۲,...$ کـه $\varphi(x) = ۳x + Bx^۲ + Cx^۳$ را در نظر بگیرید. ضرایب **B** و **C** چگونه باشند که تکرارها به‌صورت موضعی به $\frac{۱}{\alpha}$ با مرتبه همگرایی دست کـم ۳، همگرا شوند؟ (α عدد مثبت است)

۱) $B = ۳\alpha^۲ \quad , \quad C = ۳$

۲) $B = ۳\alpha \quad , \quad C = \alpha^۲$

۳) $B = -۳\alpha \quad , \quad C = \alpha^۲$

۴) $B = ۳ \quad , \quad C = ۳\alpha$

۶۶- به چند طریق می‌توان ۲۰ ورزشکار را به ۵ گروه دو نفره و ۲ گروه پنج نفره تقسیم نمود؟

۱) $\frac{۲۰!}{(۲!)^۴(۵!)}$

۲) $\frac{۲۰!}{(۲!)^۵(۵!)^۲}$

۳) $\frac{۲۰!}{(۲!)^۶(۵!)^۳}$

۴) $\frac{۲۰!}{(۲!)^۵(۵!)^۲۷!}$

۶۷- اگر جمع میانگین و میانه یک نمونه تصادفی ۱۲تایی برابر ۲۲ و بزرگ‌ترین یافته نمونه برابر ۱۷ باشد، جمع میانگین و میانه وقتی که بزرگ‌ترین یافته نمونه با ۲۳ جایگزین شود، کدام است؟

۱) ۲۲/۵

۲) ۲۳

۳) ۲۳/۵

۴) ۲۴

۶۸- از **n** توپ با شماره‌های $۱, ۲, ..., n$ به تصادف ۳ توپ بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. احتمال اینکه اولین توپ شماره‌ای کوچک‌تر از دومین توپ داشته باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$

۴) $\frac{۱}{n}$

۶۹- ظرفی شامل ۲ مهرهٔ قرمز، ۲ مهرهٔ آبی، یک مهرهٔ سیاه و ۴ مهرهٔ سفید است. به‌ترتیب و به تصادف بدون جایگذاری از ظرف مهره خارج می‌کنیم. احتمال اینکه سومین مهره سفید در بار هفتم ظاهر شود، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۹}$

۲) $\frac{۵}{۲۱}$

۳) $\frac{۵}{۱۸}$

۴) $\frac{۵}{۴۲}$

۷۰- فرض کنید $B_۱, B_۲, ..., B_n$ پیشامدهای مستقل روی یک فضای نمونه‌ای باشند که $P(B_i) = \frac{۱}{i+۱}$ برای $i = ۱, ۲, ..., n$ است. احتمال اینکه دقیقاً یکی از این پیشامدها رخ دهد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{n+۱}$

۲) $\frac{n}{n+۱}$

۳) $\frac{۱}{n+۱}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{i+۱}$

۴) $\frac{۱}{n+۱}\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{i}$

آنالیز ریاضی:

۷۱- هرگاه $d_۱$ و $d_۲$ دو متر روی مجموعه ناتهی X باشند، کدام گزینه ممکن است یک متر روی X نباشد؟

۱) $d(x,y) = \min\{d_۱(x,y), d_۲(x,y)\}$

۲) $d(x,y) = \sqrt{d_۱(x,y) + d_۲(x,y)}$

۳) $d(x,y) = \max\{d_۱(x,y), d_۲(x,y)\}$

۴) $d(x,y) = \frac{d_۱(x,y)+d_۲(x,y)}{۱+d_۱(x,y)+d_۲(x,y)}$

۷۲- فرض کنید $\{(X_n, d_n)\}$ دنباله‌ای از فضاهای متریک باشد و $X=\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. کدام گزینه ممکن است یک متر روی X نباشد؟

۱) $d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x_n,y_n)\ (x=\{x_n\},y=\{y_n\})$

۲) $d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}(x=\{x_n\},y=\{y_n\})$

۳) $d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}(x=\{x_n\},y=\{y_n\})$

۴) $d(x,y)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}\ (x=\{x_n\},y=\{y_n\})$

۷۳- برای $A\subseteq\mathbb{R}$ و $x\in\mathbb{R}$، تعریف کنید $d(x,A)=\inf\{|x-a|: a\in A\}$ و قرار دهید $E=\{x\in\mathbb{R}: d(x,A)\le 1\}$. کدام گزینه درست است؟

۱) E فشرده و همبند است.

۲) E فشرده است اما لزوماً همبند نیست.

۳) E لزوماً فشرده نیست و لزوماً همبند نیست.

۴) E لزوماً فشرده نیست اما همبند است.

۷۴- فرض کنید X و Y فضاهای متریک، X فشرده و تابع $f:X\to Y$ پیوسته باشد. اگر $A\subseteq X$ و $B\subseteq Y$، کدام گزینه درست است؟

۱) اگر A بسته باشد آنگاه $f(A)$ هم بسته است.

۲) اگر A باز باشد آنگاه $f(A)$ هم باز است.

۳) اگر B همبند باشد آنگاه $f^{-1}(B)$ نیز همبند است.

۴) اگر هر نقطه B حدی باشد آنگاه هر نقطه $f^{-1}(B)$ حدی است.

۷۵- فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و ρ,d دو متر روی X باشند به‌طوری که به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ در X اگر $\{x_n\}$ نسبت به متر d همگرا باشد آنگاه نسبت به متر ρ نیز همگرا باشد. برای $E\subseteq X$ درون E نسبت به d و ρ را به‌ترتیب با E_d° و E_ρ° نشان می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

۱) $E_d^\circ=E_\rho^\circ$.

۲) E_d° و E_ρ° ارتباطی با هم ندارند.

۳) $E_d^\circ\subseteq E_\rho^\circ$، ولی تساوی لزوماً برقرار نیست.

۴) $E_\rho^\circ\subseteq E_d^\circ$، ولی تساوی لزوماً برقرار نیست.

۷۶- فرض کنید X یک فضای متریک و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در X باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر مجموعه $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ بسته و کراندار باشد، آنگاه $\{x_n\}$ همگراست.

۲) اگر $\{x_n\}$ کوشی و دارای زیردنباله‌ای همگرا باشد، آنگاه $\{x_n\}$ همگراست.

۳) اگر هر زیردنباله $\{x_n\}$ کوشی باشد، آنگاه $\{x_n\}$ همگراست.

۴) اگر مجموعه $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ بسته و کراندار باشد، آنگاه $\{x_n\}$ کوشی است.

۷۷- فرض کنید X و Y دوفضای متریک باشند. تابع $f:X\to Y$ پیوسته است هرگاه برای هر زیرمجموعه ..... A از Y، $f^{-1}(A)$ در X ..... باشد.

۱) فشرده ـ فشرده

۲) بسته ـ فشرده

۳) فشرده ـ بسته

۴) همبند ـ همبند

۷۸- فرض کنید X و Y دوفضای متریک باشند، تابع $f:X\to Y$ را در نظر بگیرید. ارتباط گزاره زیر با پیوستگی f چیست؟ (برای هر $a\in X$ و هر دنبالهٔ $\{x_n\}$ در X همگرا به a، زیردنبالهٔ $\{x_{n_k}\}$ وجود دارد که $\{f(x_{n_k})\}$ به $f(a)$ همگراست.)

۱) این گزاره پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی پیوستگی f این گزاره را نتیجه نمی‌دهد.

۲) پیوستگی f این گزاره را نتیجه می‌دهد ولی این گزاره پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.

۳) این گزاره معادل با پیوستگی f است.

۴) این گزاره ارتباطی با پیوستگی f ندارد.

۷۹- فرض کنید (X,d) یک فضای متریک فشرده و مجموعه A متشکل از نقاط تنهای X ، ناتهی باشد. برای تابع حقیقی f روی A کدام گزینه درست است؟

۱) f فقط درصورتی پیوسته است که A همبند باشد.

۲) f فقط درصورتی پیوسته است که A متناهی باشد.

۳) f پیوسته یکنواخت است.

۴) f پیوسته است ولی لزوماً پیوسته یکنواخت نیست.

۸۰- اگر (X,d) یک فضای متریک باشد که هر تابع پیوسته $f:X\to\mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت است، آنگاه X ..... است.

۱) فشرده

۲) گسسته

۳) متناهی

۴) کامل (هر دنباله کوشی، همگرا است)

۸۱- سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n(1-x)$ بر $[0,1]$ .....

۱) به‌طور مطلق همگرای یکنواخت است.

۲) همگرای یکنواخت است ولی به‌طور مطلق همگرای یکنواخت نیست.

۳) همگرای یکنواخت نیست ولی جملهٔ عمومی آن به صفر همگرای یکنواخت است.

۴) همگرای یکنواخت نیست و جملهٔ عمومی آن نیز به صفر همگرای یکنواخت نیست.

۸۲- فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $f_n : X \to (0,+\infty)$ دنباله‌ای از توابع باشد، به‌طوری که دنباله $\left\{\frac{f_{n+1}}{f_n}\right\}$ به f همگرای یکنواخت است. به‌ازای کدام مقدار $M = \sup\{f(x) : x \in X\}$، $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ همگرای یکنواخت است؟

۱) $M = \frac{1}{2}$

۲) $M = \frac{3}{2}$

۳) $M = 1$

۴) به‌ازای هر مقدار $M \in \mathbb{R}$ سری لزوماً همگرای یکنواخت نیست.

۸۳- دنبالهٔ توابع $f_n(x) = \arctan\frac{2x}{x^2+n^2}$ بر $\mathbb{R}$ ....

۱) به‌طور یکنواخت به‌تابعی ناصفر همگراست.

۲) به‌طور نقطه‌وار به صفر همگراست ولی نه به‌طور یکنواخت.

۳) به‌طور یکنواخت به صفر همگراست.

۴) به‌طور نقطه‌وار به تابعی ناصفر همگراست ولی نه به‌طور یکنواخت.

۸۴- فرض کنید $\{f_n\}_n$ دنباله‌ای از توابع حقیقی و همگرای یکنواخت روی $\mathbb{R}$ باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)dx = \int_0^{\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$

۲) اگر هر f_n کران‌دار باشد آنگاه $\{f_n\}_n$ به‌طور یکنواخت کران‌دار است.

۳) اگر هر f_n مشتق پیوسته داشته باشد آنگاه حد $\{f_n\}$ تابعی مشتق‌پذیر است.

۴) اگر هر f_n پیوسته باشد آنگاه $\{f_n^2\}_n$ همگرای یکنواخت است.

۸۵- مقدار $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx$ کدام است؟

۱) ۰

۲) $\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) ∞

۸۶- مجموعه همه مقادیر p که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^p}$ بر بازه ..... همگرای یکنواخت است برابر است با .....

۱) $\{p : p > 0\}$ ، $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

۲) $\{p : p \geq 1\}$ ، $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

۳) $\{p : p > 0\}$ ، $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

۴) $\{p : p \geq 1\}$ ، $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

۸۷- سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-\sin x)^n \cos(nx)$ را بر بازهٔ $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

۱) سری به‌طور مطلق همگرای یکنواخت است.

۲) سری به‌طور مطلق همگرای نقطه‌وار است ولی همگرای یکنواخت نیست.

۳) سری همگرای یکنواخت است ولی به‌طور مطلق همگرای یکنواخت نیست.

۴) سری به‌طور مشروط همگرای نقطه‌وار است ولی به طور مطلق همگرای نقطه‌وار نیست.

۸۸- فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع و $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی مقدار بر $\mathbb{R}$ باشند، به طوری‌که $\sum_{n=1}^{\infty} ff_n$ بر $\mathbb{R}$ به‌طور یکنواخت همگراست. تحت کدام شرط می‌توان نتیجه گرفت $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ بر $\mathbb{R}$ به‌طور یکنواخت همگراست؟

۱) f بر $\mathbb{R}$ کراندار باشد.

۲) f $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

۳) صفر عضو بستار $f(\mathbb{R})$ نباشد.

۴) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ موجود و متناهی باشد.

۸۹- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای هم‌پیوسته از توابع حقیقی مقدار بر فضای متریک (X, d) باشد که $f_n \to f$ (نقطه‌وار). کدام گزینه نادرست است؟

۱) f پیوسته یکنواخت است.

۲) اگر X فشرده باشد، آنگاه دنباله $\{f_n\}$ یکنواخت کراندار است.

۳) f پیوسته است، اما لزوماً پیوسته یکنواخت نیست.

۴) اگر دنباله $\{f_n\}$ یکنواخت کراندار باشد، آنگاه f کراندار است.

۹۰- اگر $X = C[0,1]$ فضای توابع پیوسته حقیقی مقدار روی $[0,1]$ با نرم سوپرمم باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) X فشرده است.

۲) X هم‌پیوسته است.

۳) X ناهمبند است.

۴) X جدایی‌پذیر است.

مبانی جبر و مبانی ترکیبیات:

۹۱- کدام‌یک از حلقه‌های زیر، دامنه صحیح نیست؟

۱) $\mathbb{Z}$

۲) $\mathbb{Z}_7$

۳) $\mathbb{Q}$

۴) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

۹۲- فرض کنید p یک عدد اول است. در کدام حالت، گروه G لزوماً آبلی نیست؟

۱) $|G|=p$

۲) $|G|=p^2$

۳) $|G|=p^3$

۴) $|G/Z(G)|=p$

۹۳- ایده‌آل‌های اول حلقه $\mathbb{Z}$ به‌صورت $n\mathbb{Z}$ است که:

۱) $n=0$.

۲) n یک عدد اول است.

۳) n مربع یک عدد اول است.

۴) $n=0$ یا n یک عدد اول است.

۹۴- فرض کنید G گروه و $H\leq G$ و $[G:H]=2$ باشد. کدام مورد صحیح است؟

۱) $H\leq G'$

۲) $Hx=xH$ برای هر $x\in G$

۳) $Hx=Hx^2$ برای هر $x\in G$

۴) $H\leq Z(G)$

۹۵- کدام‌یک از گروه‌های زیر ساده نیست؟

۱) $\mathbb{Z}_3$

۲) $\mathbb{Z}_5$

۳) $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$

۴) گروه متناوب A_5

۹۶- فرض کنید G گروه کواترنیون‌های مرتبه ۸ باشد، یعنی $G=\{\pm 1,\pm i,\pm j,\pm k\}$. در این صورت مرکز G کدام است؟

۱) $\{\pm 1\}$

۲) $\{\pm 1,\pm i\}$

۳) $\{\pm 1,\pm j\}$

۴) $\{\pm 1,\pm k\}$

۹۷- فرض کنیم m و n اعداد صحیح مثبت باشند، به‌طوری‌که m یک شمارنده n است و $\sigma \in S_n$ یک دور به‌طول n باشد. در این صورت کدام مورد صحیح است؟

۱) $\sigma^m = 1$

۲) σ^m حاصل‌ضرب m دور مجزا هر کدام به طول $\frac{n}{m}$ است.

۳) σ^m حاصل‌ضرب m دور هر کدام به طول n است.

۴) σ^m حاصل‌ضرب m دور مجزا هر کدام به طول m است.

۹۸- فرض کنیم H یک زیرگروه نرمال G باشد و $|H|=4$. اگر عضو $aH \in \frac{G}{H}$ از مرتبه ۵ باشد، کدام مورد نمی‌تواند مرتبه a باشد؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۱۰

۴) ۲۰

۹۹- تعداد عناصر مرتبه ۶ در $S_3 \times \mathbb{Z}_6$ کدام است؟

۱) ۱۲

۲) ۱۵

۳) ۱۸

۴) ۲۰

۱۰۰- تعداد ایده‌آل‌های دو طرفه حلقه $M_2(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}})$ برابر با کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

۱۰۱- فرض کنید G گرافی همبند ۱۲ رأسی و ۱۸ یالی باشد که به‌صورت مسطح در صفحه رسم شده است. تعداد وجوه ایجاد شده، کدام گزینه است؟

۱) ۶

۲) ۸

۳) ۹

۴) ۱۰

۱۰۲- ضریب $x^۶y^۲z$ در بسط $(۱+۲x+۳y+۴z)^{۱۱}$ کدام است؟

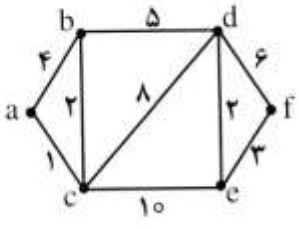
۱) $(۷۷)(۵)(۳^۴)(۲^{۱۰})$

۲) $(۷۷)(۵)(۳^۲)(۲^۲)$

۳) $(۷۷)(۵)(۳^۳)(۲^۷)$

۴) $(۷۷)(۵)(۳^۲)(۲^۳)$

۱۰۳- در گراف زیر، کم‌ترین وزن در میان مسیرهای بین نقاط a و f کدام است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۳

۳) ۱۴

۴) ۱۵

۱۰۴- با ۱۲ نفر می‌خواهیم ۳ گروه ۴ نفره برای بحث کردن تشکیل دهیم. به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) $۳\binom{۱۲}{۴}^۲$

۲) $\frac{۱۲!}{۲^۹\times ۳^۳}$

۳) $۴\binom{۱۲}{۳}^۲$

۴) $\frac{۱۲!}{۲^{۱۰}\times ۳^۴}$

۱۰۵- تابع $f(x)=(۱-۴x)^{-\frac{۱}{۲}}$، تابع مولد چه دنباله‌ای است؟

۱) $\binom{۲n}{n}$

۲) $\frac{۱}{n+۲}\binom{۲n}{n}$

۳) $\binom{۲n+۱}{n+۱}$

۴) $\frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$

۱۰۶- فرض کنید G یک گراف ۲۰۰ رأسی باشد که هیچ سه رأسی دوبه‌دو به‌هم وصل نیستند. حداکثر تعداد یال‌های G برابر است با:

۱) ۱۲۰۰۰

۲) ۸۰۰۰

۳) ۱۰۰۰۰

۴) ۵۰۰۰

۱۰۷- تعداد دنباله‌های ۵ رقمی که هر رقم آن برابر ۰، ۱ یا ۲ است و تعداد صفرهای آن فرد می‌باشد، برابر است با:

۱) ۴۰

۲) ۸۰

۳) ۱۲۱

۴) ۲۴۲

۱۰۸- ۷ مهرهٔ آبی و ۱۱ مهرهٔ قرمز داریم. به چند طریق می‌توان آن‌ها را در یک ردیف چید به‌گونه‌ای که مهرهٔ سمت راست هر مهرهٔ آبی، مهره‌ای قرمز باشد؟

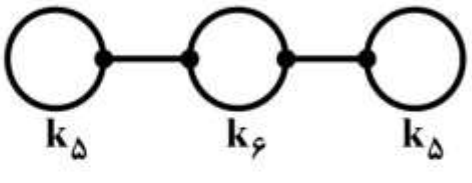
۱) $\binom{۱۲}{۵}$

۲) $\binom{۱۱}{۵}$

۳) $\binom{۱۲}{۴}$

۴) $\binom{۱۱}{۴}$

۱۰۹- تعداد تطابق‌های کامل گراف زیر کدام گزینه است؟ (منظور از یال بین k_5 و k_6 یعنی یکی از رئوس k_5 به یکی از رئوس k_6 وصل است.)



۱) ۰

۲) ۲۷

۳) ۴۸

۴) ۴×۶^۲

۱۱۰- فرض کنید G گرافی همبند، n رأسی و m یالی باشد که دور به طول زوج ندارد. در این‌صورت بهترین کران بالایی برای $\frac{m}{n}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۱/۲

۳) ۱/۵

۴) ۲

جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل:

۱۱۱- اگر A یک ماتریس $n\times n$، $n>2$، قطری غالب سطری اکید باشد و به‌ازای هر i، $a_{ii}=1$، کدام گزینه نادرست است؟

۱) A وارون‌پذیر است.
۲) $\|A\|_\infty<2$.
۳) A^{-1} قطر غالب سطری است.
۴) دستگاه $Ax=b$ جواب یکتا دارد.

۱۱۲- فرض کنید A ماتریسی حقیقی و $m\times n$ است، $m>n$ و $rank(A)=n$. جواب کمترین مربعات دستگاه $Ax=b$ با جواب کمترین مربعات دستگاه ..... برابر است.

۱) $AA^Tx=A^Tb$،
۲) $DAx=Db$، که $D^TD\neq I$ و D قطری و وارون‌پذیر،
۳) $QAx=Qb$، که $Q_{m\times m}$ یک ماتریس متعامد،
۴) $UAx=Ub$، که $U_{m\times m}$ بالامثلثی، وارون‌پذیر و $U^TU\neq I$،

۱۱۳- ماتریس A متقارن است و کوچک‌ترین مقدار ویژهٔ آن ۳- است. به ازای λ برابر با ....، ماتریس $A+\lambda I$ معین مثبت است.

۱) ۲
۲) $3+\varepsilon$ که $\varepsilon>0$
۳) ۳
۴) $3-\varepsilon$ که $0<\varepsilon$

۱۱۴- محاسبهٔ وارون و استفاده از آن در حل دستگاه مربع در مقایسه با حل مستقیم دستگاه با روش حذفی گاوس، هزینهٔ محاسباتی ..... دارد.

۱) بیشتر و دقت کمتر
۲) کمتر و دقت کمتر
۳) بیشتر و دقت بیشتر
۴) کمتر و دقت بیشتر

۱۱۵- فرض کنید $E=I-\beta uv^T$ که در آن u و v بردارهای n بعدی و β یک اسکالر است. برای محاسبهٔ کارای EX و E^TX به‌ترتیب نیاز به ..... عملیات اصلی است.

۱) $O(n^2)$ و $O(n)$
۲) $O(n)$ و $O(n^2)$
۳) $O(n^2)$ و $O(n^2)$
۴) $O(n)$ و $O(n)$

۱۱۶- دستگاه $\begin{cases}2x_1=3\\4x_1=5\end{cases}$ داده شده است. جواب کمترین مربعات آن کدام است؟

۱) ۱/۲
۲) ۱/۳
۳) ۱/۶
۴) ۱/۱

۱۱۷- مسئلهٔ $\min_x\|Ax-b\|_2$ که در آن A $m\times n$ است، .....

۱) جواب یکتا دارد اگر ستون‌های A مستقل خطی باشند.
۲) جواب بهینه برابر با صفر دارد اگر $m=n$.
۳) می‌تواند جواب نداشته باشد.
۴) بی‌نهایت جواب دارد اگر مقدار بهینه ناصفر باشد.

۱۱۸- مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر و جدول نهایی ناکامل آن را در نظر بگیرید. در جدول نهایی، مقادیر α و β چقدر هستند؟

$$\text{Max } z = 6x_1 + 2x_2 + 12x_3$$
$$\text{s.t.} \quad 4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 24$$
$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \le 30$$
$$x_1 , x_2 , x_3 \ge 0$$

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	۱				α		β
x_3	۰				$\frac{1}{3}$		
s_2	۰				-1		

۱) $\alpha = 2 , \beta = 96$ ۲) $\alpha = 2 , \beta = 94$ ۳) $\alpha = 4 , \beta = 96$ ۴) $\alpha = 4 , \beta = 94$

۱۱۹- فرض کنید جدول زیر متناظر با یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس برای حل مسئلهٔ

$$\min \ c^T x$$
$$\text{s.t.} \quad Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

است که $b \ge 0$. به‌علاوه، s_1، s_2 و s_3 متغیرهای کمکی این مسئله هستند و $a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$ ستون ضرایب متغیر x_2 در ماتریس A است. در این صورت، مقدار β_2 برابر است با ... .

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
z	۱	α	β	۰	۰	۰	η	u
x_3	۰	α_1	β_1	۱	۰	۰	η_1	u_1
s_2	۰	α_2	β_2	۰	۰	۱	η_2	u_2
s_1	۰	α_3	β_3	۰	۱	۰	η_3	u_3

۱) $\eta_2 a_{22}$ ۲) $a_{22} + \eta_2 a_{32}$ ۳) $\eta_3 a_{22}$ ۴) $a_{22} + \eta_3 a_{32}$

۱۲۰- اگر در یک جواب بهینه مسئلهٔ زیر، متغیرهای x_1 و x_3 پایه‌ای باشند و z^* (مقدار بهینه تابع هدف) برابر با ۱۴ باشد، مقدار c_1 کدام است؟

$$\text{Max } z = c_1 x_1 - x_2 + 8x_3$$
$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 9$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 5$$
$$x_1 , x_2 , x_3 \ge 0$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۲۱- جدول پایانی فاز یک در روش دو فازی برای حل یک مسئله می‌نیمم‌سازی استاندارد را در نظر بگیرید و فرض کنید هیچ متغیر تصنعی در آن پایه‌ای نیست. در این‌صورت، $z_j - c_j$ (ضریب هزینه کاهش یافته) متناظر با همه متغیرهای تصنعی برابر است با ... .

۱) ۰ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) $-M+۱$

۱۲۲- فرض کنید که یک جواب بهینه برای مسئله

$$\text{Min } z = x_۱ + x_۲ + c_۳x_۳$$
$$\text{s.t.} \quad x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ = ۲$$
$$-x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱$$
$$x_j \geq ۰ \ , \ j = ۱,۲,۳$$

به ازای $x_۱ = x_۲ = ۱$ و $x_۳ = ۰$ به‌دست می‌آید. در این‌صورت، متغیرهای دوگان، $y_۱$ و $y_۲$ ، در جواب بهینه برای مسئله دوگان برابرند با ... .

۱) $y_۱ = ۱ \ , \ y_۲ = ۰$ ۲) $y_۱ = y_۲ = ۱$
۳) $y_۱ = ۰ \ , \ y_۲ = ۱$ ۴) $y_۱ = y_۲ = ۲$

۱۲۳- فرض کنید $b \leq ۰$ و داریم $Ax \geq b \Rightarrow c^T x \geq ۰$. در این‌صورت، کدام مورد درست است؟

۱) $A^T v = c \Rightarrow v^T b \leq ۰$ ۲) $A^T v = c \ , \ v \leq ۰ \Rightarrow v^T b = ۰$
۳) $A^T v = c \ , \ v \geq ۰ \Rightarrow v^T b = ۰$ ۴) $A^T v = c \ , \ v \geq ۰ \Rightarrow v^T b \leq ۰$

۱۲۴- یک مسئله برنامه‌ریزی خطی با بخشی از جدول بهینه را به‌صورت زیر در نظر بگیرید. فرض کنید $s_۱$ متغیر کمکی (مازاد) قید اول است (قید اول از نوع $\geq$ است.)

اگر مقدار سمت راست قید اول از $b_۱$ به $b_۱ + \Delta$ تغییر کند، آن‌گاه تحت چه شرطی جدول داده شده، بهینه (و شدنی) باقی می‌ماند؟

	z	...	$s_۱$	...	RHS
z	۱	...		...	
	۰	...	-۳	...	۹
	۰	...	۱	...	۴
	۰	...	۲	...	۲

۱) $-۱ \leq \Delta \leq ۳$ ۲) $-۹ \leq \Delta \leq -۴$ ۳) $۰ \leq \Delta \leq ۴$ ۴) $-۳ \leq \Delta \leq ۱$

۱۲۵- دستگاه خطی با ضرایب ثابت $\frac{dx}{dt} = Ax$ را درنظر بگیرید، در مورد گزاره‌های الف و ب کدام گزینه درست است؟

الف) وقتی $t \to \infty$ همه جواب‌های دستگاه به صفر میل می‌کنند.

ب) قسمت حقیقی همهٔ مقادیر ویژه $A_۰$ منفی هستند.

۱) ب از الف نتیجه می‌شود ولی الف از ب نتیجه نمی‌شود.

۲) الف از ب نتیجه می‌شود ولی ب از الف نتیجه نمی‌شود.

۳) الف و ب معادل هستند.

۴) الف و ب مستقل از یکدیگر هستند.

۱۲۶- فرض کنید $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ تابعی هموار و متناوب با دوره تناوب $p>0$ باشد. اگر $x(t)$ یک جواب معادله $\frac{dx}{dt}=f(x)$ باشد و $T=\int_0^p \frac{dx}{f(x)}$ آنگاه کدام تساوی برای هر t درست است؟

۱) $x(t+T)-x(t)=p$
۲) $x(t+T)-x(t)=2p$
۳) $x(t+p)-x(t)=T$
۴) $x(t+p)-x(t)=2T$

۱۲۷- اگر میدان $f(x)$ نسبت به x به طور موضعی لیپ‌شیتز و $x(t)$ جوابی از معادله $\frac{dx}{dt}=f(x)$ باشد و $\lim_{t\to\infty} x(t)=x_0$ آنگاه $f(x_0)$ کدام است؟

۱) $x(0)$
۲) x_0
۳) 0
۴) $x(x_0)$

۱۲۸- فرض کنید $\lambda=2i$ مقدار ویژه ماتریس حقیقی A باشد و تعداد ویژه بردارهای مستقل خطی متناظر با آن برابر ۳ باشد. در دستگاه $\frac{d}{dt}X=AX$ تعداد جواب‌های متناوب مستقل با دوره تناوب اصلی π کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

۱۲۹- دوره تناوب جواب معادله $x''+2x+x^3=0$ با شرایط اولیه $x'(0)=0$ و $x(0)=1$ کدام است؟

۱) $T=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{4+\sin^2\theta}}$
۲) $T=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{5+\sin^2\theta}}$
۳) $T=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{4+\cos^2\theta}}$
۴) $T=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{5+\cos^2\theta}}$

۱۳۰- بازه ماکسیمال جواب معادله زیر کدام است؟

$$\begin{cases} x'(t)=e^t-(1+x^2)x \\ x(0)=1 \end{cases}$$

۱) $(0,1)$
۲) $(0,\infty)$
۳) $(1,\infty)$
۴) $(-\infty,\infty)$

احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی:

۱۳۱- اگر Y به‌طور یکنواخت روی بازهٔ $(۰,۵)$ توزیع شده باشد، احتمال اینکه هر دو ریشه معادله $۴x^۲ + ۴xY + Y + ۲ = ۰$ حقیقی باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$

۲) $\frac{۳}{۵}$

۳) $\frac{۴}{۵}$

۴) $\frac{۱}{۵}$

۱۳۲- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از توزیع $N(۱,۱)$ باشند. مقدار $P(XY - X - Y + ۱ > ۰)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۳۳- بازه $(۰,۱)$ را به تصادف به دو قسمت تقسیم کرده و طول دو قسمت حاصل را با X و Y نشان می‌دهیم. متوسط مساحت مستطیلی به اضلاع X و Y کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۱۳۴- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال استاندارد است. توزیع متغیر تصادفی $Y = \frac{X}{|X|}$ کدام است؟

۱) $t(۲)$ ۲) $C(۰,۱)$

۳) $N(۰,۱)$ ۴) $DU(\{-۱,+۱\})$

۱۳۵- فرض کنید تعداد مشتریانی که وارد دفتر خدمات دولت الکترونیک می‌شوند دارای توزیع پواسون با نرخ متوسط ۹ نفر در ساعت باشد. احتمال اینکه فاصلهٔ زمانی بین ورود دو مشتری متوالی کمتر از ۱۵ دقیقه باشد، کدام است؟

۱) $۱-e^{-\frac{۵}{۳}}$ ۲) $e^{-\frac{۵}{۳}}$

۳) $۱-e^{-\frac{۹}{۴}}$ ۴) $e^{-\frac{۹}{۴}}$

۱۳۶- در دسته کلید شخصی n کلید وجود دارد که فقط یکی از آن‌ها درب اتاق کارش را باز می‌کند. هر بار این شخص به تصادف و یک به یک هر یک از کلیدها را مستقل از یکدیگر امتحان می‌کند. واریانس تعداد دفعاتی که لازم است تا درب باز شود در صورتی‌که کلیدهای اشتباهی کنار گذاشته نشوند، کدام است؟

۱) $\frac{n}{۲}$

۲) $n(n-۱)$

۳) $\frac{n(n+۱)}{۲}$

۴) $n(n+۱)$

۱۳۷- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F_X(x)$ باشد و $Y=sign(X)$ (تابع علامت)، مقدار $Var(Y)$ کدام است؟

۱) $۴F_X(۰)(۱-F_X(۰))$

۲) $F_X(۰)$

۳) $F_X(۰)(۱-F_X(۰))$

۴) $۴F_X(۰)$

۱۳۸- فرض کنید $X_۱X_۲,....$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل یکنواخت روی بازه $[۰,۱]$ باشد. اگر $y=x_۱^a+(x_۱x_۲)^a+(x_۱x_۲x_۳)^a+\cdots$ باشد، مقدار $E(Y)$ کدام است؟ $(a>۰)$

۱) $\frac{۱}{a}$

۲) a

۳) $\frac{۱}{a+۱}$

۴) $a+۱$

۱۳۹- فرض کنید $X_۱,X_۲,....,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال $P(X=\pm ۱)=\frac{۱}{۲}$ باشد. مقدار $P(\sum_{i=۱}^{n}X_i>-n)$ کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲})^n$

۲) $(\frac{۱}{۲})$

۳) ۱

۴) $۱-(\frac{۱}{۲})^n$

۱۴۰- فرض کنید (X,Y) دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد. مقدار $P(\sqrt{X} > Y)$ کدام است؟

$$f(x,y) = y\,e^{-\frac{1}{2}x - y^2} \quad x > 0 , y > 0$$

۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) $\frac{3}{4}$

۱۴۱- فرض کنید $Y \sim Exp(1)$ و $X \mid Y = y \sim P(y)$ باشند. مقدار $cov(e^{-Y}, X)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $-\frac{1}{2}$

۴) $\frac{1}{4}$

۱۴۲- فرض کنید $X_1,...,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. توزیع حدی $\sqrt{n}(2-3\bar{X})$ کدام است؟ ($\bar{X}$ میانگین نمونه است.)

$$f_X(x) = 2x \ , \ 0 < x < 1$$

۱) $N(1,1)$

۲) $N(1,\frac{1}{2})$

۳) $N(0,1)$

۴) $N(0,\frac{1}{2})$

۱۴۳- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $Exp(\theta,1)$ با تابع چگالی احتمال زیر باشد. توزیع حدی $X_{(1)}$ (مینیمم X_i ها) کدام است؟

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \ , \ x \geq \theta$$

۱) تباهیده در θ

۲) $Exp(\theta,1)$

۳) یکنواخت $U(\theta,\theta+1)$

۴) تباهیده در صفر

۱۴۴- فرض کنید $Y_1, Y_2, ...$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع احتمال $P(Y_1 = i) = \frac{1}{6}, i = 1,...,6$ باشند. اگر $X_n = \max_{n\geq 1}(Y_1,...,Y_n)$، آنگاه $\{X_n, n \geq 1\}$ یک زنجیره مارکوف است. مقدار $p_{23}^{(8)} = P(X_{n+8} = 3 \mid X_n = 2)$ کدام است؟

۱) $(\frac{2}{6})^8 - (\frac{1}{6})^8$

۲) $(\frac{4}{6})^8 - (\frac{2}{6})^8$

۳) $(\frac{3}{6})^8 - (\frac{2}{6})^8$

۴) $(\frac{3}{6})^8 - (\frac{1}{6})^8$

۱۴۵- زنجیر مارکوف X با فضای وضعیت $S = \{0, 1, 2\}$ و ماتریس احتمال انتقال زیر را درنظر بگیرید. فرض کنید $E_x[T_y]$ نشان‌دهنده متوسط زمان انتظار برای ورود فرایند به‌وضعیت y با شروع از وضعیت x باشد. گزینه درست کدام است؟

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

۱) $E_0[T_1] < \infty$

۲) $E_1[T_2] = \infty$

۳) $E_0[T_0] = \infty$

۴) $E_1[T_1] = \infty$

۱۴۶- فرض کنید $N(t) \sim P(\lambda t)$، مقدار $P\left[\frac{N(2)}{N(5)+N(2)} < \frac{1}{2}\right]$ کدام است؟

۱) $e^{-3\lambda}$

۲) $1 - e^{-2\lambda}$

۳) $1 - e^{-3\lambda}$

۴) $e^{-2\lambda}$

۱۴۷- در زنجیر مارکوف دو حالتی $\{X_n : n \geq 0\}$(در وضعیت ۰ , ۱) با ماتریس احتمال‌های تغییر وضعیت زیر، انتظار می‌رود در چند درصد مراحل، فرایند در حالت ۰ باشد؟

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

۱) ٪۳۳/۳

۲) ٪۴۷

۳) ٪۵۳

۴) ٪۶۶/۶

۱۴۸- برای زنجیر مارکوف $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ با فضای وضعیت $s = \{0,1,2,3,4\}$ و ماتریس احتمال‌های انتقال زیر، کلاس‌های هم ارزی کدام است؟

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0/2 & 0/2 & 0/2 & 0/2 & 0/2 \\ 0 & 0/3 & 0 & 0 & 0/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

۱) $\{\{0,3\},\{1,2,4\}\}$

۲) $\{\{0\},\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$

۳) $\{\{0,3\},\{2\},\{1,4\}\}$

۴) $\{\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

۱۴۹- فرض کنید $\{X_n, n \geq 0\}$ یک زنجیره مارکوف با توزیع اولیه $P[X_0 = 1] = p$, $P[X_0 = 2] = q$, $p + q = 1$ و ماتریس تغییر وضعیت یک مرحله‌ای $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $P(X_1 = X_2)$ کدام است؟

۱) $\frac{11-q}{16}$

۲) $\frac{1+p}{16}$

۳) $\frac{3(1+p)}{16}$

۴) $\frac{11-p}{16}$

۱۵۰- اگر $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرایند پواسون با پارامتر $\lambda(>0)$ و T_1 یک متغیر تصادفی نمایی با متوسط $\frac{1}{\lambda}$ و مستقل از فرایند پواسون باشد، مقدار $Var(N(T_1))$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴