کُدکنترل

436

A

436A

نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

عصر جمعه
۹۶/۲/۸

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی‌ارشد ناپیوستهٔ داخل ــ سال ۱۳۹۶

مجموعه ریاضی ــ کد ۱۲۰۸

تعداد سؤال: ۱۳۵ — مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شمارهٔ سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۴۵	۳۱	۷۵
۳	دروس تخصصی (آنالیز ریاضی، مبانی ترکیبیات، مبانی جبر و بهینه‌سازی خطی)	۶۰	۷۶	۱۳۵

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

PART A: Vocabulary
Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.

1- **Working on the assembly line was --------- work because I did the same thing hour after hour.**
1) efficacious 2) monotonous 3) momentous 4) erroneous

2- **People are guilty of --------- when they make judgments before they know all of the facts.**
1) illusion 2) arrogance 3) avarice 4) prejudice

3- **Justin --------- himself from the embarrassing situation by pretending he had to make a telephone call.**
1) extricated 2) extracted 3) exposed 4) expelled

4- **He was accused of manipulating the financial records to cover his ---------.**
1) suspicion 2) scrutiny 3) fraud 4) paradox

5- **Since the jungle was ---------, we had to find an alternate route to the village.**
1) permanent 2) vulnerable 3) redundant 4) impenetrable

6- **Management refused to --------- the union's demands, so a strike costly to both sides occurred.**
1) capitulate to 2) withdraw from 3) impose on 4) grump about

7- **We had nothing in common, but despite our --------- backgrounds and interests, my new roommate and I became good friends by the end of the semester.**
1) comprehensive 2) conscious 3) heterogeneous 4) haphazard

8- **Megan's foreboding about going to class turned out to be --------- as the instructor gave a surprise test for which she was completely unprepared.**
1) qualified 2) justified 3) perplexed 4) wholehearted

9- **If she had known how much of an --------- her student debt would be, she would have found a different way to finance her education.**
1) application 2) encumbrance 3) immunity 4) optimism

10- **The mechanic examined the engine carefully but said he was not able to --------- the cause of the problem.**
1) pinpoint 2) derive 3) acquire 4) escalate

PART B: Cloze Passage
Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Horticulture has a very long history. The study and science of horticulture dates all the way back to the times of Cyrus the Great of ancient Persia, and has been going on (11) ----------, with present-day horticulturists such as Freeman S. Howlett and Luther Burbank. The practice of horticulture can be retraced for (12) ----------. The cultivation of taro and yam in Papua New Guinea dates back (13) ---------- at least 6950–6440 cal BP. The origins of horticulture (14) ---------- in the transition of human communities from nomadic hunter-gatherers to sedentary or semi-sedentary horticultural communities, (15) ---------- a variety of crops on a small scale around

their dwellings or in specialized plots visited occasionally during migrations from one area to the next.

11- 1) ever since 2) yet 3) that far 4) still
12- 1) many thousands years 2) many thousands of years
3) years of many thousands 4) many years of thousands
13- 1) from 2) for 3) in 4) to
14- 1) are laid 2) lay 3) lie 4) are lying
15- 1) cultivating 2) cultivated 3) that cultivated 4) to cultivate

Part C. Reading Comprehension
Directions: ***Read the following three passages and choose the best choice (1), (2), (3) or (4). Then mark it on your answer sheet.***

PASSAGE 1:

The modern theory of optimization in normed linear space is largely centered about the interrelations between a space and its corresponding dual—the space consisting of all continuous linear functionals on the original space. In this chapter we consider the general construction of dual spaces, give some examples, and develop the most important theorem in this book—the Hahn-Banach theorem.

In the remainder of the book we witness the interplay between a normed space and its dual in a number of distinct situations. Dual space plays a role analogous to the inner product in Hilbert space; by suitable interpretation we can develop results extending the projection theorem solution of minimum norm problems to arbitrary normed linear spaces. Dual space provides the setting for an optimization problem "dual" to a given problem in the original (primal) space in the sense that if one of these problems is a minimization problem, the other is a maximization problem. The two problems are equivalent in the sense that the optimal values of objective functions are equal and solution of either problem leads to solution of the other. Dual space is also essential for the development of the concept of a gradient, which is basic for the variational analysis of optimization problems. And finally, dual spaces provide the setting for Lagrange multipliers, fundamental for a study of constrained optimization problems.

Our approach in this chapter is largely geometric. To make precise mathematical statements, however, it is necessary to translate these geometric concepts into concrete algebraic relations. In this chapter we follow two paths to a final set of algebraic results by considering two different geometrical viewpoints, corresponding to two versions of the Hahn-Banach theorem. The first viewpoint parallels the development of the projection theorem, while the second is based on the idea of separating convex sets with hyperplanes.

16- Which of the following statements is true about the Hahn-Banach theorem?

1) It has no geometric interpretation.
2) It relates to optimization on a certain space.
3) It has no relation to the projection theorem.
4) It has no relation to separating convex sets with hyperplanes.

17- Which of the following is closest in meaning to the underlined word "separating" in the passage?

1) Augmenting 2) Encircling 3) Joining 4) Setting apart

18- A minimization problem ----------.

1) can be solved through solving a dual problem
2) cannot be approached through the concept of duality
3) can only be solved by projection onto a Hilbert space
4) can only be solved by projection onto a Banach space

19- Dual space ---------- Lagrange multipliers.

1) complicates the interpretation of 2) removes the need for
3) facilitates the introduction of 4) misappropriates the

20- The inner product in Hilbert space ----------.

1) is the space used for maximization 2) has removed the need for dual space
3) has similarities with dual space 4) is the space used for minimization

PASSAGE 2:

A multistage process is characterized by a certain number of parameters, which are called the state variables. In other words, the values of the *state variables* at each stage fully describe the status of the process at that stage. A combination of the values of the state variables is called a state of the process. For example, in the machine-shop problem, the state variable is the number of machines that are in working order. Also, consider the problem of making daily assignment of men and women workers to perform a certain number of jobs, some of which are open only to men and some of which are open only to women. The state variables are then the numbers of men and women who report to work on each day.

A multistage process is said to be *Markovian*, if at any stage the behavior of the process depends solely on the current values of the state variables. For example, in the machine-shop problem, the operation of the shop depends solely on the number of machines that are in working order in each week. Throughout our discussion, a multistage process shall be understood to be Markovian, unless otherwise specified. At each stage of a multistage process, a *decision* is a choice among a certain number of possible actions. The number of alternative actions can be either finite or infinite. In the machine-shop problem, the decision we have to make each week is the number of machines to be assigned to product *A*. The quantity to be optimized in a decision problem is called the *objective function*. Clearly, this function in the machine-shop problem is the total profit in the three-week period. A decision at each stage not only affects the value of the objective function, but also determines the values of the state variables at the subsequent stage. In the machine-shop problem, the decision on the number of machines to be assigned to each of the two products not only affects the total profit, but also determines the number of usable machines for the subsequent week. Since the process is Markovian, a decision at each stage can be made solely on

the basis of the values of the state variables. In a multistage decision problem, a *policy* is any rule for making a decision at each of the stages that yields an allowable sequence of decisions. For example, in the machine-shop problem, a policy consists of the numbers of machines to be assigned to product *A* in each of the first, second, and third weeks. An *optimal policy* is one which optimizes the objective function.

21- Which of the followings is true about a Markovian process?

1) Some state variables may be undefined at some stages.
2) Only an optional policy can be achieved.
3) At any stage, only an optimal decision can be made.
4) The state of the process is the only determinant of its behavior.

22- Which of the following is closest in meaning to the underlined word "yields"?

1) Specifies 2) Disregards 3) Distinguishes 4) Involves

23- A decision at a stage ----------.

1) determines only the values of the state variables at the subsequent stage
2) has an effect on the values of the objection function
3) can only be made optimally
4) has no relation to an optimal policy

24- Which of the following statements best describes an optimal policy?

1) Any rule giving the best values of the objective function.
2) One which provides optimal decision at each stage.
3) Any rule for provision of allowable sequence of decisions.
4) Any set of rules for making decisive decisions at various stages.

25- In a decision, ----------.

1) only an optimal choice is allowed
2) an infinite choice of alternative actions can be made at the expense of losing optimality
3) only a finite number of actions can be made
4) there may be a limited or an unlimited number of actions to be made

PASSAGE 3:

Perhaps the richest and most exciting area of application of the projection theorem is the area of statistical estimation. It appears in virtually all branches of science, engineering, and social science for the analysis of experimental data, for control of systems subject to random disturbances, or for decision making based on incomplete information.

All estimation problems discussed in this chapter are ultimately formulated as equivalent minimum norm problems in Hilbert space and are resolved by an appropriate application of the projection theorem. This approach has several practical advantages but limits our estimation criteria to various forms of least squares. At the outset, however, it should be pointed out that there are a number of different least-squares estimation procedures which as a group offer broad flexibility in problem formulation. The differences lie primarily in the choice or optimality criterion and in the statistical assumptions required. In this chapter three basic forms of least-squares estimation are distinguished and examined.

Least squares is, of course, only one of several established approaches to estimation theory, the main alternatives being maximum likelihood and Bayesian techniques.

These other techniques usually require a complete statistical description of the problem variables in terms of joint probability distribution functions, whereas least squares requires only means, variances, and covariances. Although a thorough study of estimation theory would certainly include other approaches as well as least squares, we limit our discussion to those techniques that are derived as applications of the projection theorem. In complicated, multivariable problems the equations resulting from the other approaches are often nonlinear, difficult to solve, and impractical to implement. It is only when all variables have Gaussian statistics that these techniques produce linear equations, in which case the estimates are identical with that obtained by least squares. In many practical situations then, the analyst is forced by the complexity of the problem to either assume Gaussian statistics or to employ a least-squares approach. Since the resulting estimates are identical, which is used is primarily a matter of taste.

26- Which of the following is closest in meaning to the word "flexibility" in paragraph 2?

1) Complexity
2) Tractability
3) Restriction
4) Evaluation

27- The projection theorem ----------.

1) is inappropriate for estimation problems
2) is not suitably stated for problems defined over a Hilbert space
3) can be applied to minimum norm problems
4) is not effectively applicable to minimum norm problems

28- Least squares, maximum likelihood and Bayesian techniques are ----------.

1) the only approaches to estimation theory
2) among the many approaches to statistical estimation
3) unsatisfactory approaches to statistical estimation
4) all instances of the projection theorem

29- For multivariate problems, the resulting equations ----------.

1) are impractical
2) are always nonlinear
3) may be nonlinear but can easily be solved
4) can be linear if variables have proper statistics

30- The complexity of a problem ----------.

1) imposes no difficulty for the least squares approach
2) makes Gaussian statistics useless
3) makes the least squares approach inappropriate
4) makes estimation ineffective

دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۳۱- اگر z عددی مختلط و ناصفر باشد که $z+\frac{1}{z}=2\cos\alpha$ ، آنگاه $z^n+\frac{1}{z^n}$ کدام است؟

۱) $2\cos^n\alpha$

۲) $2n\cos\alpha$

۳) $2^n\cos\alpha$

۴) $2\cos(n\alpha)$

۳۲- اگر $(n\in\mathbb{N})$ $a_n=\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(n)}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ، آنگاه $\lim_{n\to\infty}a_n$ کدام است؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) e

۴) ∞

۳۳- مقدار $\lim_{x\to+\infty}(3^x+3^{2x})^{\frac{1}{x}}$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۶

۳) ۹

۴) ۱۰

۳۴- مقدار $\int_0^\infty e^{-x^3}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{2})$

۲) $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{3})$

۳) $2\Gamma(\frac{1}{2})$

۴) $\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})$

۳۵- طول منحنی تابع $f(x)=\int_{0}^{x}\sqrt{\cos h(t)}\,dt$ بر بازه $[0,2]$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}\,(e-\frac{1}{e})$

۲) $2(e-\frac{1}{e})$

۳) $\sqrt{2}\,(e+\frac{1}{e})$

۴) $2(e+\frac{1}{e})$

۳۶- اگر معادله $e^{x}\cos(z+y)-xy-z^{2}=0$ متغیر x را به‌صورت تابعی مشتق‌پذیر از دو متغیر مستقل y و z تعریف کند، مقدار $\frac{\partial x}{\partial z}$ در نقطه متناظر با $\begin{vmatrix} y=-1 \\ z=1 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱) -1

۲) 0

۳) 1

۴) 2

۳۷- صفحه مماس بر رویه S در نقطه دلخواه $(a\ ,\ b\ ,\ c)$ واقع بر آن به‌صورت زیر است. اگر بدانیم رویه شامل نقطه $(1,2,3)$ است، معادله دکارتی رویه کدام است؟

$$(a+c)(x-a)-(b+c)(y-b)+(a-b)(z-c)=0$$

۱) $x^{2}-y^{2}+2xz-2yz+9=0$

۲) $x^{2}-y^{2}+xz-yz+6=0$

۳) $2x^{2}-2y^{2}+2xz-yz+6=0$

۴) $2x^{2}-2y^{2}+3xz-2yz+9=0$

۳۸- مقدار انتگرال $\int_{0}^{1}\int_{\sqrt[3]{y}}^{1}\sqrt{x^{4}+1}\,dx\,dy$ کدام است؟

۱) 0

۲) $\frac{\sqrt{2}-1}{6}$

۳) $\frac{\sqrt[3]{9}-1}{4}$

۴) $\frac{2\sqrt{2}-1}{6}$

۳۹- اگر V ناحیه محدود به دو کره $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ و S سطح خارجی ناحیه V و $\vec{F}(x,y,z)=(5x^3+12xy^2,\ y^3+e^y\sin z, 5z^3+e^y\cos z)$ باشد، شارگذرنده از سطح S توسط نیروی $\vec{F}$ کدام است؟

۱) 371π

۲) 372π

۳) 373π

۴) 374π

۴۰- نقیض گزاره زیر کدام است؟

A با زیر مجموعه‌ای از B هم‌عدد (هم‌توان) است ولی B با هیچ زیر مجموعه‌ای از A هم‌عدد نیست.

۱) A با هیچ زیر مجموعه‌ای از B هم‌عدد نیست یا B با زیرمجموعه‌ای از A هم‌عدد است.

۲) A با هیچ زیر مجموعه‌ای از B هم‌عدد نیست یا B با هر زیرمجموعهٔ A هم‌عدد است.

۳) مجموعه‌ای وجود دارد که اگر زیرمجموعهٔ B باشد آنگاه با A هم‌عدد است یا B با هر زیرمجموعهٔ A هم‌عدد است.

۴) زیرمجموعه‌ای از B وجود دارد که با A هم‌عدد نیست یا اینکه B با زیر مجموعه‌ای از A هم‌عدد است.

۴۱- فرض کنید f رابطهٔ دوتایی و F و G دو خاصیت باشند. کدام گزینه درست است؟

۱) $\forall x\,(F(x)\vee G(x))\Rightarrow(\forall x\,F(x)\vee\forall x\,G(x))$

۲) $(\forall x\,F(x)\Rightarrow\forall x\,G(x))\Rightarrow\forall x(F(x)\Rightarrow G(x))$

۳) $\forall x\,\exists y\,(x\,f\,y)\Rightarrow\exists y\,\forall x\,(x\,f\,y)$

۴) $\exists y\,\forall x(x\,f\,y)\Rightarrow\forall x\exists y(x\,f\,y)$

۴۲- ترتیب جدیدی به‌صورت زیر برای اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم. کدام گزینه درست است؟

$\ldots,2k+1,2k-1,\ldots,5,3,1,2,4,6,\ldots,2m,2m+2,\ldots$

۱) مجموعهٔ اعداد زوج اینفیمم ندارد.

۲) مجموعهٔ مضارب ۵ مینیمم دارد.

۳) مجموعهٔ اعداد فرد سوپرمم دارد ولی اینفیمم ندارد.

۴) هر زیر مجموعهٔ $\mathbb{N}$ با ترتیب فوق ماکسیمال و مینیمال دارد.

۴۳- فرض کنید $f_1 : A_1 \to B_1$ و $f_2 : A_2 \to B_2$ دو تابع باشند. تابع $f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم. گزینه صحیح کدام است؟

$$f(a) = \begin{cases} f_1(a), & a \in A_1 \\ f_2(a), & a \notin A_1 \end{cases}$$

۱) ممکن است f_1 و f_2 هر دو یک به یک باشند ولی f یک به یک نباشد.

۲) اگر f_1 و f_2 هر دو یک به یک باشند آنگاه f نیز یک به یک است.

۳) اگر f_1 و f_2 هر دو پوشا باشند آن‌گاه f نیز پوشا است.

۴) f خوش تعریف نیست.

۴۴- فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع باشد. کدام‌یک از گزاره‌های زیر معادل یک به یک بودن تابع f نیست؟

۱) برای هر $A, B \subseteq X$ ، $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

۲) برای هر $A \subseteq X$ ، $(f(A))^c \subseteq f(A^c)$.

۳) برای هر $A \subseteq X$ ، $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$.

۴) برای هر $A, B \subseteq X$، اگر $f(A) = f(B)$ آن‌گاه $A = B$.

۴۵- اگر تابع $f : X \to Y$ یک به یک باشد آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) اگر X شمارای نامتناهی باشد Y هم شمارای نامتناهی است.

۲) اگر Y شمارای نامتناهی باشد X متناهی یا شماراست.

۳) اگر Y شمارای نامتناهی باشد X هم شمارای نامتناهی است.

۴) Y با هیچ زیر مجموعه‌ای از X هم‌عدد (هم‌توان) نیست.

۴۶- دستگاه معادلات $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$ را درنظر بگیرید. اگر H زیرفضای حاصل از جواب‌های این دستگاه باشد آن‌گاه بعد H به عنوان زیرفضای $\mathbb{R}^3$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۰

۴۷- فرض کنید $A=\begin{pmatrix}۱۰ & ۲۵\\ ۰ & -۱۰\end{pmatrix}$. در این صورت $A^{۱۰۰}$ کدام ماتریس است؟

۱) $۲۵I$

۲) $۱۰^{۱۰۰}I$

۳) $\begin{pmatrix}۱۰^{۱۰۰} & ۲۵^{۱۰۰}\\ ۰ & ۱۰^{۱۰۰}\end{pmatrix}$

۴) $\begin{pmatrix}۱۰^{۱۰۰} & ۲۵^{۱۰۰}\\ ۰ & -۱۰^{۱۰۰}\end{pmatrix}$

۴۸- فرض کنید U فضای چند جمله‌ای‌های تولید شده توسط $۱, x^۲, x^۴$ و $x^۶$ روی $\mathbb{R}$ باشد. مختصات بردار $۲-x^۲+x^۴+x^۶$ در پایهٔ مرتب $\{x^۶+۱, x^۶-x^۴, x^۴-x^۲, x^۲-۱\}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}۵\\ ۳\\ ۳\\ -۱\end{pmatrix}$

۲) $\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}-۳\\ ۵\\ ۳\\ -۱\end{pmatrix}$

۳) $\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}-۵\\ -۳\\ ۳\\ ۱\end{pmatrix}$

۴) $\frac{۱}{۲}\begin{pmatrix}-۳\\ -۵\\ -۳\\ -۱\end{pmatrix}$

۴۹- اگر $A\in M_۴(\mathbb{R})$ ، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $adj(cA)=c^۴adjA$ ، برای هر $c\in\mathbb{R}$.

۲) $adj(A+B)=adjA+adjB$ ، برای هر $B\in M_۴(\mathbb{R})$.

۳) $adj(AB)=(adjA)(adjB)$ ، برای هر $B\in M_۴(\mathbb{R})$.

۴) $det(adjA)=(detA)^۳$.

۵۰- فرض کنید $A\in M_n(\mathbb{R})$ و $rank(A)=k>۰$ ، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $rank(A^۲)=k$

۲) $rank(A^۲)<k$

۳) $A_۱,\dots,A_k\in M_n(\mathbb{R})$ موجودند که $A=\sum_{i=۱}^{k}A_i$ و برای هر i ، $rank(A_i)=۱$.

۴) $A_۱,\dots,A_k\in M_n(\mathbb{R})$ موجودند که $A=A_۱A_۲\dots A_k$ و برای هر i ، $rank(A_i)=۱$.

۵۱- فرض کنید $A \in M_2(\mathbb{R})$. در این صورت تساوی $A^{100} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1-\varepsilon \end{bmatrix}$ به ازای چند $\varepsilon > 0$ امکان‌پذیر است؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) نامتناهی

۵۲- فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ تابعی پیوسته باشد. کدام گزینه درباره تابع f درست است؟

۱) یک‌به‌یک است.

۲) تابع ثابت است.

۳) پوشا است.

۴) چنین تابعی قابل تعریف نیست.

۵۳- فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دو بار مشتق‌پذیر بوده و به ازای هر $x \in R$ ، $f''(x) > 0$. اگر $f(1) + f'(1) > 0$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) f تابعی زوج است.

۲) f تابعی فرد است.

۳) $f(2) < 0$

۴) $f(2) > 0$

۵۴- فرض کنید تابع حقیقی غیرثابت f بر $[0, +\infty)$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L > 0$. کدام گزینه درست است؟

۱) $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

۲) $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$

۳) $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = L$

۴) تابع f' بر $(0, +\infty)$ بی‌کران است.

۵۵- فرض کنید f و g دو تابع پیوسته بر $[a, b]$ باشند که $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

اگر $A = \{x \in [a,b] \mid f(x) = g(x)\}$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) اگر A ناتهی باشد آنگاه A متناهی با بیش از یک عضو است.

۲) اگر A ناتهی باشد آنگاه A نامتناهی است.

۳) ممکن است A تک عضوی باشد.

۴) ممکن است A تهی باشد.

۵۶- فرض کنید A یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی باشد به‌طوری که $\mathbb{Q} \subseteq A$. کدام گزینه درباره A در فضای $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی درست است؟

۱) اگر A بسته باشد، آنگاه $A = \mathbb{R}$

۲) اگر A شمارا باشد، آنگاه A بسته است.

۳) اگر A ناشمارا باشد، آنگاه $A = \mathbb{R}$

۴) اگر A باز باشد، آنگاه $A = \mathbb{R}$

۵۷- اگر $A = \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \frac{1}{m+1} : n,m \in \mathbb{N} \right\}$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $\sup A = 1$ و $\inf A = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$

۲) $\sup A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\inf A = \frac{-1-\sqrt{2}}{2}$

۳) $\sup A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\inf A = -\frac{3}{2}$

۴) $\sup A = 1$ و $\inf A = -\frac{3}{2}$

۵۸- فرض کنید $A = \left\{ \frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z} , n \in \mathbb{N} \right\}$. کدام گزینه درباره A در فضای $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی درست است؟

۱) باز است ولی بسته نیست.

۲) نه باز است و نه بسته.

۳) بسته است ولی باز نیست.

۴) هم باز است و هم بسته.

۵۹- تابع f بر بازه $[0,1]$ با ضابطه زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} \left[\sin\frac{1}{x}\right] & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(منظور از نماد $[x]$ جزء صحیح x است) کدام گزینه نادرست است؟

۱) مجموعه نقاط ناپیوستگی f بسته است.

۲) مجموعه نقاط ناپیوستگی f ناشمارا است.

۳) مجموعه نقاط ناپیوستگی f نقطه حدی دارد.

۴) ناپیوستگی‌های f در نقاط غیر صفر از نوع اساسی است.

۶۰- فرض کنید $f(x)=\ln x$ و $g(x)=x\ln x$. بر بازه $(0,1)$ کدام گزینه درست است؟

۱) f و g هر دو پیوسته یکنواخت هستند.

۲) هیچ کدام از توابع f و g پیوسته یکنواخت نیستند.

۳) f پیوسته یکنواخت نیست ولی g پیوسته یکنواخت است.

۴) f پیوسته یکنواخت است ولی g پیوسته یکنواخت نیست.

۶۱- فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد آنگاه $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است.

۲) اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد آنگاه $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است.

۳) اگر $\left\{\sqrt[n]{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد آنگاه $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است.

۴) اگر $\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا باشد آنگاه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا است.

۶۲- فرض کنید x_0 و y_0 اعداد مثبت و به ازای هر $n\in N$، $x_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}$ و $y_n=\sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}$. کدام گزینه درست است؟

۱) $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرا هستند و $\lim x_n \geq \lim y_n$ ولی لزوماً برابر نیستند.

۲) $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرا هستند و $\lim y_n \geq \lim x_n$ ولی لزوماً برابر نیستند.

۳) $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرا هستند و $\lim x_n = \lim y_n$.

۴) $\{x_n\}$ یا $\{y_n\}$ وابسته به انتخاب x_0 و y_0 ممکن است همگرا نباشد.

۶۳- اگر $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ و $B=\sum_{n=1}^{\infty}(-e)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) سری B همگرا و سری A واگراست.

۲) هر دو سری واگرا است.

۳) سری A همگراست و سری B واگراست.

۴) هر دو سری همگرا هستند.

۶۴- مقادیر α, β چه باشند تا فرمول زیر برای چند جمله‌ای‌های با حداکثر درجه دقیق باشد؟

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x}\, f(x)dx \simeq \alpha \int_{0}^{1} f(x)dx + \beta \int_{0}^{1} x f(x)dx$$

۱) $\alpha = \frac{1}{5}$, $\beta = \frac{4}{5}$

۲) $\alpha = \frac{4}{5}$, $\beta = \frac{1}{5}$

۳) $\alpha = \frac{4}{15}$, $\beta = \frac{4}{5}$

۴) $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$

۶۵- اگر A یک ماتریس حقیقی $m \times n$ باشد و $b \in R^m$ و $x \in R^n$، گزینه درست در مورد مسئله $\min_{x \in R^n} \| Ax - b \|_2$ کدام است؟

۱) مسئله جواب یکتا دارد.

۲) مسئله می‌تواند جواب نداشته باشد.

۳) مسئله نمی‌تواند جوابی با مقدار کمینه برابر با صفر داشته باشد.

۴) مسئله یا یک جواب یکتا یا بی‌نهایت جواب دارد.

۶۶- فرض کنید P_2 چند جمله‌ای درجه دومی باشد که f را در نقاط هم فاصلهٔ x_0، $x_0 + h$ و $x_0 + 2h$ درون‌یابی می‌کند. اگر مشتق سوم f روی $[x_0, x_0 + 2h]$ با M کران‌دار باشد، یک کران بالای مناسب برای $|f'(x_0 + h) - P_2'(x_0 + h)|$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6} h^2 M$

۲) $\frac{2}{3} h^2 M$

۳) $\frac{1}{3} h^2 M$

۴) $\frac{3}{2} h^2 M$

۶۷- فرض کنید x_i، $i = 0, 1, \ldots, n$، اعداد دو به دو متمایز و $p(x)$ درون‌یاب چند جمله‌ای حداکثر از درجهٔ n در داده‌های $(x_i, f(x_i))$ باشد. اگر $x_1 = 0$، جمله ثابت در چند جمله‌ای درون‌یاب $p(x)$ کدام است؟

۱) $f(x_0)$

۲) $f(x_1)$

۳) $f[x_0, x_2]$

۴) $f[x_0, x_1]$

۶۸- فرض کنید $h(x)=x-\frac{f(x)}{g(x)}$، $f(\alpha)=0$ و $g(\alpha)\neq 0$. چه روابطی بین f و g برقرار باشد تا دنباله $\{x_n\}$ با ضابطهٔ $x_{n+1}=h(x_n)$، در صورت همگرایی، مرتبه همگرایی دست کم برابر با ۳ داشته باشد؟(فرض کنید $f,g\in c^2(\mathbb{R})$)

۱) $f''(\alpha)=g(\alpha)+g'(\alpha)\ ,\ f'(\alpha)=g(\alpha)$

۲) $f''(\alpha)=2g(\alpha)\ ,\ f'(\alpha)=g(\alpha)$

۳) $f''(\alpha)=2g'(\alpha)+g(\alpha)\ ,\ f'(\alpha)=g(\alpha)$

۴) $f''(\alpha)=2g'(\alpha),\ f'(\alpha)=g(\alpha)$

۶۹- در یک دستگاه ممیز شناور با مبنای ۸ که اعداد به صورت $\pm 0/d_1d_2...d_{10}\times 8^e$ با $d_1\neq 0$ و $0\leq d_i\leq 7$ برای $i=1,2,...,10$ و $-63\leq e\leq 63$ نمایش داده می‌شوند، بیشترین فاصله بین دو عدد متوالی قابل نمایش چقدر است؟

۱) 8^{-10}

۲) 8^{22}

۳) 8^{53}

۴) 8^{63}

۷۰- در داده‌های زیر، با استفاده از نمودار جعبه‌ای، چند داده دور افتاده وجود دارد؟

۱۴, ۱۸, ۱۲, ۴۴, ۳۴, ۶۶, ۳۷, ۱۴, ۳۴, ۱۴, ۷, ۲۳, ۱۴, ۲۲, ۲۱

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۷۱- به چند طریق می‌توان ۵ حرف A و ۶ حرف B را در یک ردیف قرار داد که از راست و چپ یکسان خوانده شوند؟

۱) $\frac{5!}{3!}$

۲) $\frac{10!}{5!\,5!}$

۳) $\frac{5!}{3!\,2!}$

۴) $\frac{1}{2}\times\frac{11!}{5!\,6!}$

۷۲- کیسه‌ای شامل ۴ مهره قرمز و ۶ مهره آبی است. کیسه دیگری شامل ۱۶ مهره قرمز و تعدادی مجهول مهره آبی است. یک مهره به تصادف از هر کیسه انتخاب می‌شود، احتمال اینکه دو مهره انتخابی هم رنگ باشند ۰/۴۴ است. تعداد مهره‌های آبی کیسه دوم کدام است؟

۱) ۴

۲) ۶

۳) ۱۲

۴) ۲۰

۷۳- فرض کنید $A_1,...,A_n$ پیشامدهای مستقلی باشند به‌طوری که برای هر $i = 1,...,n$ داشته باشیم $P(A_i) = \frac{1}{i+1}$. احتمال اینکه حداقل یکی از A_i ها رخ دهد کدام است؟

۱) $\frac{1}{n+1}$

۲) $\frac{n}{n+1}$

۳) $\frac{n-1}{n}$

۴) $\frac{1}{n}$

۷۴- از مجموعه $\{1,2,3,...,10\}$ تعداد ۶ عدد را به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه کوچکترین عدد انتخابی از ۴ بزرگتر باشد،کدام است؟

۱) $(\frac{3}{5})^6$

۲) $\frac{3}{5}$

۳) $(\frac{1}{10})^6$

۴) $\frac{1}{210}$

۷۵- اگر $P(B|A^c) = \frac{3}{4}$ و $P(B^c|A) = \frac{1}{4}$ و $P(A) = \frac{3}{4}$، مقدار $P(A|B)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{3}{4}$

۴) ۱

دروس تخصصی (آنالیز ریاضی، مبانی ترکیبیات، مبانی جبر و بهینه‌سازی خطی):

۷۶- فرض کنید متریک d روی $\mathbb{R}$ به‌صورت $d(x,y)=\begin{cases}|x|+|y| & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$ تعریف شده باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) اگر A فشرده باشد آنگاه A متناهی است.

۲) $\mathbb{N}$ باز است.

۳) $(\mathbb{R},d)$ همبند است.

۴) $\mathbb{Z}$ باز است.

۷۷- در فضای متریک (X,d) کدام گزینه برای هر $A,B\subseteq X$ درست است؟ (A' مجموعه نقاط حدی A، A° مجموعه نقاط درونی A و ∂A مرز A است.)

۱) اگر $(A\cup B)'\neq\phi$ آنگاه $A'\neq\phi$ یا $B'\neq\phi$.

۲) اگر $(A\cup B)^\circ\neq\phi$ آنگاه $A^\circ\neq\phi$ یا $B^\circ\neq\phi$.

۳) اگر $\partial(A\cup B)=\phi$ آنگاه $\partial(A)=\phi$ یا $\partial(B)=\phi$.

۴) اگر $A\cup B$ در X چگال باشد، آنگاه A یا B در X چگال هستند.

۷۸- همه گزینه‌های زیر در فضای متریک (X,d)، کامل بودن X (هر دنباله کوشی در X همگرا باشد) را نتیجه می‌دهند، به‌جز:

۱) هر دنباله کوشی دارای زیر دنباله‌ای همگرا باشد.

۲) به ازای هر دنبالهٔ کوشی $\{x_n\}$، مجموعهٔ $\{x_n\,;\,n\in\mathbb{N}\}$ فشرده باشد.

۳) هر دنباله دارای زیر دنباله‌ای کوشی باشد.

۴) هر دنباله کران‌دار دارای زیردنباله‌ای همگرا باشد.

۷۹- اگر (X,d) یک فضای متریک باشد و $E\subseteq X$، کدام گزینه درست است؟

۱) اگر X کران‌دار و E ناشمارا باشد آن‌گاه $E'\neq\phi$.

۲) اگر X کامل (هر دنباله کوشی در آن همگرا) و E ناشمارا باشد آن‌گاه $E'\neq\phi$.

۳) اگر X بی‌کران و E ناشمارا باشد آن‌گاه $E'\neq\phi$.

۴) اگر X فشرده و E ناشمارا باشد آن‌گاه E' ناشمارا است.

۸۰- اگر E زیر مجموعه ناتهی و کران‌دار از $\mathbb{R}^2$ باشد که $E'=\phi$، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) مرز E می‌تواند تهی باشد.

۲) E^c می‌تواند ناهمبند باشد.

۳) هر تابع $f:E\to\mathbb{R}$ ماکزیمم خود را اختیار می‌کند.

۴) تابع پیوسته و بی‌کران $f:E\to\mathbb{R}$ وجود دارد.

۸۱- **اگر Y و X دو فضای متریک باشند و $f : X \to Y$، کدام گزینه درست است؟**

۱) اگر برای هر زیرمجموعه فشرده K از Y، $f^{-1}(K)$ در X فشرده باشد، آن‌گاه f پیوسته است.

۲) اگر f پیوسته و $E \subseteq X$ کران‌دار باشد آن‌گاه $f(E)$ نیز کران‌دار است.

۳) اگر f پیوسته و $K \subseteq Y$ فشرده باشد آن‌گاه $f^{-1}(K)$ نیز در X فشرده است.

۴) اگر برای هر زیرمجموعه باز و کران‌دار U از Y ، $f^{-1}(U)$ در X باز باشد، آن‌گاه f پیوسته است.

۸۲- **فرض کنیم X و Y فضاهای متریک باشند و $f : X \to Y$، هر دنباله کوشی را به یک دنباله کوشی تصویر کند. کدام گزینه درست است؟**

۱) تابع f پیوسته یکنواخت است.

۲) تابع f می‌تواند ناپیوستگی اساسی داشته باشد.

۳) تابع f پیوسته است ولی لزوماً پیوسته یکنواخت نیست.

۴) تابع f می‌تواند ناپیوسته باشد ولی ناپیوستگی‌های آن از نوع رفع شدنی هستند.

۸۳- **فرض کنید $C[0,1]$ فضای توابع پیوسته حقیقی مقدار بر $[0,1]$ مجهز به متر $d(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in [0,1]\}$ باشد. کدام گزینه در مورد مجموعهٔ $\{f \in C[0,1] : 0 < \int_0^1 f(x)dx < 1\}$ درست است؟**

۱) باز است ولی کراندار نیست.

۲) باز و کراندار است.

۳) کراندار است ولی باز نیست.

۴) نه کراندار است و نه باز.

۸۴- **اگر اعضای دنباله $\{f_n\}$ و f توابعی روی $\mathbb{R}$ باشند، آنگاه همه عبارات زیر درست هستند، به‌جز:**

۱) اگر $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت روی دو مجموعه A و B آنگاه $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت روی $A \cup B$.

۲) اگر $f_n \to f$ به‌طور نقطه‌وار روی مجموعه فشرده K، آنگاه $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت روی K.

۳) اگر $f_n \to f$ به‌طور یکنواخت و g کراندار باشد آنگاه $f_n g \to fg$ به‌طور یکنواخت.

۴) اگر $f_n \to f$ به‌طور نقطه‌وار و f_nها توابعی صعودی باشند آنگاه f نیز صعودی است.

۸۵- **فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی هم‌پیوسته بر فضای متریک فشرده X باشد. کدام گزینه همگرایی یکنواخت دنبالهٔ $\{f_n\}$ را نتیجه می‌دهد؟**

۱) دنباله $\{f_n\}$ یکنواخت کران‌دار است.

۲) $\{f_n\}$ زیر دنباله‌ای همگرای یکنواخت دارد.

۳) توابع f_n و f مشتق‌پذیرند و دنبالهٔ $\{f_n'\}$ همگرای یکنواخت به f' است.

۴) زیرمجموعه چگال A از X موجود است که $\{f_n\}$ بر A به تابع پیوسته f همگرای نقطه‌وار است.

۸۶- تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته است. همگرایی کدام یک از دنباله‌های توابع زیر لزوماً یکنواخت نیست؟

۱) $\{f(\frac{x}{n})\}$

۲) $\{(nf(x))^{\frac{1}{n}}\}$

۳) $\{\sin(\frac{1}{n}f(x))\}$

۴) $\{f(|x-\frac{1}{n}|)\}$

۸۷- دنباله توابع $f_n(x)=\frac{nx}{1+nx^2}$ $(n\in\mathbb{N})$ روی کدام بازه همگرای یکنواخت است؟

۱) بر هر بازه کران‌دار در $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت است، ولی بر $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت نیست.

۲) بر هر بازه به‌صورت $[a,\infty)$ که $a>0$ همگرای یکنواخت است ولی بر $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت نیست.

۳) بر هیچ بازه‌ای همگرای یکنواخت نیست.

۴) بر $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت است.

۸۸- اگر $(n\in\mathbb{N})$ $g_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k(1+kx^2)}$ کدام گزینه درباره دنبالهٔ توابع $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر $\mathbb{R}$ درست است؟

۱) نقطه‌وار همگرا است ولی یکنواخت همگرا نیست.

۲) نقطه‌وار همگرا نیست.

۳) یکنواخت به تابعی پیوسته همگرا است.

۴) یکنواخت به تابعی ناپیوسته همگرا است.

۸۹- کدام گزینه درباره سری $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\sqrt[n]{1+\frac{x^2}{n}}$ درست است؟

۱) بر هر زیرمجموعه کران‌دار $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت است ولی بر $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت نیست.

۲) بر هیچ زیر بازه $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت نیست.

۳) فقط بر زیر بازه‌های $(-1,1)$ همگرای یکنواخت است.

۴) بر $\mathbb{R}$ همگرای یکنواخت است.

۹۰- مقدار سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ کدام است؟

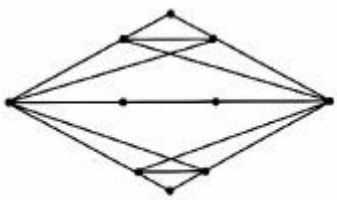
۱) $\frac{\pi}{4}$

۲) $\frac{\pi^2}{12}$

۳) $\frac{\pi}{8}$

۴) $\frac{\pi^2}{6}$

۹۱- **فرض کنید G گراف مقابل باشد. کدام گزاره در مورد G صحیح است؟**



۱) G گرافی همیلتنی است.

۲) G گرافی اویلری است.

۳) G گرافی دوبخشی است.

۴) G گرافی فاقد رأس برشی و یال برشی است.

۹۲- **کدام گزاره صحیح است؟**

۱) هر گراف ۱۲ رأسی با ۵۵ یال همبند است.

۲) گرافی ۱۲ رأسی وجود دارد که خودش و مکملش هر دو ناهمبندند.

۳) گرافی ۱۱ رأسی وجود دارد که ۷- منتظم و همیلتنی است.

۴) اگر G گرافی ۱۱ رأسی با ماکزیمم درجه ۷ باشد آنگاه گراف H موجود است که ۷- منتظم است و G زیرگراف القایی H است.

۹۳- **فرض کنید $X=\{1,2,...,8\}$. گرافی تشکیل می‌دهیم. به ازای هر زیرمجموعهٔ ۴ عضوی یک رأس بگذارید. دو رأس را به هم وصل کنید اگر اشتراک آنها ۲ عضوی باشد، درجهٔ هر رأس این گراف برابر است با:**

۱) ۲۵

۲) ۳۰

۳) ۳۶

۴) ۹۰

۹۴- **فرض کنید G گرافی دلخواه با n رأس و m یال است، روی هر یال آن یک رأس جدید قرار می‌دهیم و گراف حاصل را S(G) می‌نامیم کدام گزاره در مورد S(G) نادرست است؟**

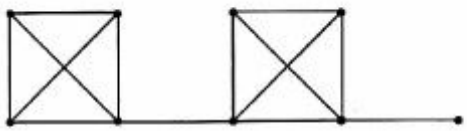
۱) گراف S(G) شامل حداقل یک دور فرد است.

۲) گراف S(G) دقیقاً $2m$ یال دارد.

۳) گراف S(G) دقیقاً $n+m$ رأس دارد.

۴) گراف G وجود دارد که S(G) شامل یک دور شش رأسی باشد.

۹۵- تعداد زیردرخت‌های فراگیر گراف روبه‌رو کدام است؟



۱) ۲۵۶

۲) ۲۵۰

۳) ۱۵۰

۴) ۱۴۴

۹۶- همهٔ گزینه‌های زیر درست‌اند، به‌جز:

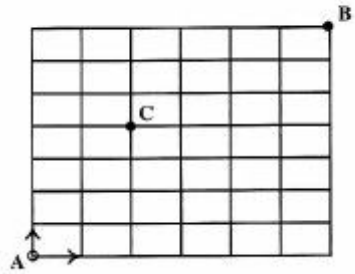
۱) گراف مسطح دوبخشی ۴- منظم وجود ندارد.

۲) گراف مسطح ۱۰۰ رأسی با ۲۹۵ یال وجود دارد.

۳) در هر گراف مسطح و همبند یک رأس با درجهٔ کمتر از ۶ وجود دارد.

۴) اگر G یک گراف با حداقل ۱۱ رأس باشد آنگاه G یا $\overline{G}$ نامسطح است.

۹۷- اگر فقط بتوانیم حرکت روبه‌بالا یا به سمت راست داشته باشیم، به چند طریق می‌توان از A به B حرکت نمود که حتماً از C بگذریم؟



۱) $\binom{۱۳}{۶}$

۲) $۶!۷!$

۳) $\binom{۶}{۲}\binom{۷}{۳}$

۴) $۱۳!$

۹۸- چند عدد چهاررقمی (با صفر شروع نمی‌شود) $\overline{abcd}$ وجود دارد که زوج باشد و $a<b<c<d$؟

۱) ۴۵

۲) ۴۶

۳) ۴۷

۴) ۴۸

۹۹- تعداد دنباله‌های ۱۰ رقمی با ارقام ۰، ۱ و ۲ چقدر باشد که اول آن با ۱۰۰۲ شروع شود یا در مکان ششم رقم ۰ و در مکان هفتم رقم ۱ ظاهر شده باشد؟

۱) $۳^۴+۳^۶$

۲) $۳^۸+۳^۴-۳^۶$

۳) $۳^۶+۳^۸$

۴) $۳^۶+۳^۸-۳^۴$

۱۰۰- فرض کنید G گرافی همبند ۱۰ رأسی و A ماتریس اتصال آن باشد. کدام گزینه دربارهٔ $(A+I)^9$ و $(A+I)^{10}$ درست است؟

۱) هر دو ماتریس درایه‌ای دارند که صفر است.

۲) درایه‌های هر دو ماتریس همگی مثبتند.

۳) روی قطر هر دو ماتریس همهٔ درایه‌ها یک هستند.

۴) درایه‌های یکی همگی مثبت و دیگری دارای درایه‌ای برابر صفر است.

۱۰۱- مربع لاتین از مرتبهٔ n را طلایی گویند، هرگاه متقارن بوده و عناصر روی قطر آن همگی برابر باشند. تعداد مربع‌های لاتین طلایی از مرتبهٔ ۵ برابر است با:

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۵

۴) $5!$

۱۰۲- تابع مولد مربوط به تعداد راه‌هایی که می‌توان ۱۰ کتاب متمایز را در ۵ قفسه متمایز جای داد، به‌طوری که هیچ قفسه‌ای خالی نماند، کدام است؟

۱) e^{5x}

۲) $(\frac{1-x^7}{1-x})^5$

۳) $(e^x-1)^5$

۴) $x^5(\frac{1-x^6}{1-x})^5$

۱۰۳- اگر P_n یک مسیر با n رأس باشد، $n \geq 1$، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های مستقل حداقل یک رأسی در P_8 کدام است؟

۱) ۲۸

۲) ۳۳

۳) ۴۱

۴) ۵۴

۱۰۴- فرض کنید $B=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_{10}\}$. به چند طریق می‌توان زیرمجموعه‌های A_1 و A_2 و ... A_6 را انتخاب نمود که $B=\bigcup_{i=1}^{6} A_i$ باشد؟ (توجه کنید $A_1, ..., A_6$ لزوماً متمایز نمی‌باشند.)

۱) 10^6

۲) 6^{10}

۳) 63^{10}

۴) 10^{64}

۱۰۵- به چند طریق می‌توان با ۳ رنگ اعداد موجود در مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۱۰\}$ را رنگ‌آمیزی کرد به طوری که اگر اختلاف اعداد **a** و **b** عددی فرد باشد، همرنگ نباشند؟

۱) ۱۰۲

۲) ۱۸۶

۳) ۱۸۸

۴) ۲۰۰

۱۰۶- فرض کنید **R** یک حلقه جابه‌جایی و یکدار باشد به‌طوری که ۳ ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد. تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال در حلقه $R\times R$ چندتاست؟

۱) ۳

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۹

۱۰۷- کدام‌یک از حلقه‌های زیر عنصر پوچتوان ناصفر ندارد؟

۱) $\mathbb{Z}_۳[x]$

۲) $M_۳(\mathbb{Z}_۴)$

۳) $\mathbb{Z}_۴[x]$

۴) $M_۴(\mathbb{Z}_۳)$

۱۰۸- فرض کنید **R** حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار و $P_۱, P_۲$ ایده‌آل‌های **R** باشند. اگر $P_۱\cap P_۲$ ایده‌آلی اول باشد، در این صورت:

۱) $P_۱\nsubseteq P_۲$

۲) $P_۱\nsubseteq P_۲$ و $P_۲\nsubseteq P_۱$

۳) $P_۱ = P_۱P_۲$

۴) $P_۱\subseteq P_۲$ یا $P_۲\subseteq P_۱$

۱۰۹- تعداد عناصر وارون‌پذیر حلقه $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{۱۲}$ چندتاست؟

۱) ۸

۲) ۶

۳) ۴

۴) ۲

۱۱۰- فرض کنید $K\in\{\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\}$، در این صورت حلقهٔ $\frac{K[x]}{<x^۴+۶x^۲+۹>}$ برای چند حالت **K** میدان است؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۱۱۱- فرض کنید $G = < x >$. همچنین $H = < x^m >$ و $K = < x^n >$. اگر $H \cap K = < x^r >$ آنگاه:

۱) r مساوی بزرگترین مقسوم علیه مشترک m و n است.

۲) $r = m + n$

۳) r مساوی کوچکترین مضرب مشترک m و n است.

۴) $r = |m - n|$

۱۱۲- عناصر (۱۲) و (۱۴۲۳) در S_4 چه گروهی را تولید می‌کنند؟

۱) A_4

۲) D_8

۳) S_4

۴) Q_8

۱۱۳- فرض کنیم G یک گروه و $x \in G$ به گونه‌ای که $x^2 \neq e$, $x^6 = e$. در این صورت مرتبه x کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۶

۴) ۳ یا ۶

۱۱۴- تحت کدام شرایط می‌توان نتیجه گرفت که زیر گروه H از G یک زیر گروه نرمال G است؟

۱) $H \cap G' = 1$

۲) $H \cap Z(G) = 1$

۳) $G' \leq H$

۴) $Z(G) \leq H$

۱۱۵- فرض کنید گروه G مجموعهٔ اعداد حقیقی ناصفر با عمل ضرب بوده و $k > 1$ عددی طبیعی باشد. در این صورت نگاشت $\varphi : G \to G$ با ضابطه $\varphi(g) = g^k$ دارای کدام ویژگی زیر است؟

۱) همواره یک یکریختی است.

۲) اگر k فرد باشد، یک یکریختی است.

۳) همواره یک همریختی پوشا است و هستهٔ آن متناهی است.

۴) اگر k فرد باشد یک همریختی پوشا است و هستهٔ آن نامتناهی است.

۱۱۶- گروه خارج قسمتی $\frac{\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}}{< (0,2) >}$ با کدام گروه زیر یکریخت است؟

۱) $\mathbb{Z}_8$

۲) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$

۳) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

۴) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

۱۱۷- چند همریختی گروهی از A_4 به $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ وجود دارد؟

۱) ۱

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۶

۱۱۸- فرض کنید G گروهی است که $G' \leq Z(G)$ و $g \in G$. اگر $H = \{x \in G \mid xg = gx\}$ در این صورت:

۱) $H = Z(G)$

۲) $H \subseteq G'$

۳) $H \cap G' = 1$

۴) $H \lhd G$

۱۱۹- مرتبهٔ عضو $(6,10)$ در گروه $\mathbb{Z}_{50} \times \mathbb{Z}_{24}$ برابر است با:

۱) ۵

۲) ۲۵

۳) ۲۵۰

۴) ۳۰۰

۱۲۰- فرض کنید G گروهی است که $G'' \leq Z(G)$، که G'' زیرگروه مشتق G' است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) G' گروهی آبلی است.

۲) $\frac{Z(G)}{G'}$ گروهی آبلی است.

۳) $\frac{G'}{Z(G)}$ گروهی آبلی است.

۴) $\frac{G'}{G' \cap Z(G)}$ گروهی آبلی است.

۱۲۱- مسأله برنامه‌ریزی خطی (P) به صورت $\min \; z = c^T x$ s.t. $Ax \geq b$، $0 \leq x \leq u$ با $u > 0$، $b \leq 0$ و $c \geq 0$ را در نظر بگیرید. بردار u را به بردار جدید $\frac{1}{p}u$ به ازای $0 \neq p \in \mathbb{R}$ تغییر دهید. در این صورت، مسألهٔ جدید ...

۱) می‌تواند بی‌کران باشد.

۲) یا جواب بهینه دارد یا بی‌کران است.

۳) جواب بهینه دارد اگر و تنها اگر $p > 0$.

۴) می‌تواند ناشدنی باشد، اگر $p > 0$.

۱۲۲- فرض کنید $S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=b\ ,\ x\geq 0\}$، که در آن A ماتریسی $m\times n$ با رتبهٔ m است. بردار $x^0\in S$ یک نقطهٔ رأسی S است اگر و تنها اگر ...

۱) n ابر صفحه تعریف کننده S از x^0 عبور کنند.

۲) تعداد مؤلفه‌های غیرصفر x^0 برابر با m باشد.

۳) اسکالر $\lambda\in(0,1)$ و بردارهای $x^1,x^2\in S$ وجود نداشته باشند که $x^0=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\in S$

۴) ستون‌های ماتریس A متناظر با مؤلفه‌های غیرصفر x^0 مستقل خطی باشند.

۱۲۳- جدول بهینهٔ یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است. اگر s_1 و s_2 متغیرهای کمکی (کمبود) برای قیدهای مسأله باشند (قیدها از نوع $\leq$ هستند)، آنگاه کدام گزینه در مورد مقدار بهینهٔ مسأله (z^*) درست است؟

	z	x_1	...	x_n	s_1	s_2	
z	۱				−۴	−۱	z^*
					−۳	۱	۲
					۳	۲	۱۱

۱) $z^*=-19$

۲) $z^*=-8$

۳) $z^*=-13$

۴) اطلاعات جدول کافی نیست و نمی‌توان z^* را به دست آورد.

۱۲۴- فرض کنید B یک ماتریس پایه متناظر با یک جواب پایه‌ای‌شدنی برای مسألهٔ

$$\begin{aligned}\min\quad & Z=c^Tx\\ \text{s.t.}\quad & Ax=b\\ & x\geq 0\end{aligned}$$

است. فرض کنید $\hat{B}$ ماتریسی است که از جایگزینی ستون r ام B با یک ستون غیرپایه‌ای k ام از A به دست آمده و در جدول سیمپلکس مربوط به B، y_{rk} مقدار واقع در سطر rام و ستون k ام جدول است. در این صورت، $\hat{B}$ یک ماتریس پایه است اگر و تنها اگر ...

۱) $y_{rk}=0$

۲) $y_{rk}>0$

۳) $y_{rk}<0$

۴) $y_{rk}\neq 0$

۱۲۵- دو مجموعهٔ چندوجهی $S_1=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=b\ ,\ x\geq 0\}$ و $S_2=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=d\ ,\ x\geq 0\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $b\geq d$. کدام گزینه صحیح است؟

۱) S_1 بی‌کران است $\Leftrightarrow$ S_2 بی‌کران است.

۲) بی‌کران بودن S_1، بی‌کران بودن S_2 را نتیجه می‌دهد ولی عکس آن لزوماً درست نیست.

۳) بی‌کران بودن S_2، بی‌کران بودن S_1 را نتیجه می‌دهد ولی عکس آن لزوماً درست نیست.

۴) رابطه‌ای بین بی‌کران بودن S_1 و S_2 وجود ندارد.

۱۲۶- فرض کنید در یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس در سطر i ام جدول داریم $y_{ij} \geq 1$، برای هر x_j غیرپایه‌ای. بردار y_j ستون زیر متغیر x_j در جدول سیمپلکس است و y_{ij} نشان دهندهٔ مؤلفهٔ i- ام آن است. در این صورت، ....

۱) مسأله ناشدنی است.

۲) مسأله بی‌کران است.

۳) مسأله جواب بهینه دارد.

۴) مسأله دوگان ناشدنی یا بی‌کران است.

۱۲۷- جدول زیر جدول نهایی یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی در حالت Min سازی است. کدام گزینه در مورد این مسأله درست است؟

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
z	۱	−۱	۰	۰	۰	−۲	۸
x_2	۰	۱	۱	−۲	۰	۲	۱
x_4	۰	۲	۰	−۳	۱	۱	۲

۱) مسأله مقدار بهینهٔ نامتناهی دارد (مسأله بی‌کران است).

۲) مسأله جواب بهینه یکتا دارد.

۳) مسأله بیش از یک جواب بهینهٔ رأسی دارد.

۴) مسأله جواب بهینه دگرین (چندگانه) دارد ولی تنها یک جواب بهینهٔ رأسی دارد.

۱۲۸- کدام گزینه نادرست است؟

۱) شرایط مکمل زائد (لنگی ـ مکمل) در هر جدول سیمپلکس چه بهینه باشد چه نباشد برقرار است.

۲) اگر همه مؤلفه‌های ستون زیر یک متغیر در جدول سیمپلکس (y_j) نامثبت باشند، آنگاه ناحیهٔ شدنی مجموعه‌ای بی‌کران است.

۳) اگر مقدار بهینهٔ متغیر کمکی (لنگی) نظیر یک قید صفر باشد، می‌توان آن قید را بدون تأثیر بر بهینگی از مسأله حذف کرد.

۴) در یک تکرار از روش سیمپلکس ممکن است نقطهٔ رأسی متناظر با آن تکرار بهینه باشد ولی سطر تابع هدف در جدول، شرایط بهینگی را نداشته باشد.

۱۲۹- یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی و جدول بهینهٔ آن به صورت زیر داده شده است که x_3، x_4 و x_5 متغیرهای لنگی (Slack) به‌ترتیب برای قیود اول، دوم و سوم مسأله هستند. با فرض این که درایه‌ها در سطر ۰ام به‌صورت $z_j - c_j$ باشند، مقادیر پارامترهای **a** و **b** به‌ترتیب عبارتند از ..... .

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 2x_1 + ax_2 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ & 4x_1 + x_2 \le b \\ & 4x_1 - x_2 \le 8 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	۱	۰	۰	c	$\frac{1}{4}$	d	h
x_2	۰	۰	۱	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	e	۲
x_1	۰	۱	۰	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	f	$\frac{3}{2}$
x_5	۰	۰	۰	۱	−۲	g	۴

۱) ۱ و ۸

۲) ۱ و −۴

۳) ۲ و ۸

۴) ۲ و −۴

۱۳۰- مقدار بهینهٔ مسألهٔ زیر کدام است؟

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \le 2 \\ & 2x_3 + x_4 \le 3 \\ & x_1 \le 1 \\ & -x_3 + 2x_4 \le 0 \\ & x_1, \ldots, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

۱) $z = \frac{28}{5}$

۲) $z = \frac{29}{5}$

۳) $z = \frac{26}{5}$

۴) $z = \frac{27}{5}$

۱۳۱- کدام گزینه شرایط بهینگی **KKT** را برای مسألهٔ زیر به درستی نشان می‌دهد؟ (بردارهای **y** و **z** ضرایب لاگرانژ (متیغرهای دوگان) هستند.)

$$\min \quad c^T x$$
$$\text{s.t.} \quad Ax \le b$$
$$Dx \ge d$$

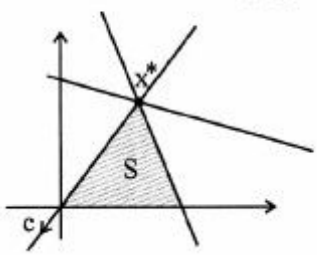
۱)
$$\begin{cases} A^T y + D^T z = c \\ y \le 0 \ , \ z \ge 0 \\ (Ax-b)^T y = (Dx-d)^T z \le 0 \end{cases}$$

۲)
$$\begin{cases} A^T y + D^T z = c \\ y \ge 0 \ , \ z \le 0 \\ (Ax-b)^T y = (Dx-d)^T z \le 0 \end{cases}$$

۳)
$$\begin{cases} A^T y + D^T z = c \\ y \le 0 \ , \ z \ge 0 \\ (Ax-b)^T y = (Dx-d)^T z \ge 0 \end{cases}$$

۴)
$$\begin{cases} A^T y + D^T z = c \\ y \ge 0 \ , \ z \le 0 \\ (Ax-b)^T y = (Dx-d)^T z \ge 0 \end{cases}$$

۱۳۲- مجموعهٔ $S=\left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax \ge b \ , x \ge 0\right\}$ و بردار $c \in \mathbb{R}^2$، در شکل زیر داده شده‌اند. به چند طریق می‌توان بردار **c** را به‌صورت ترکیب خطی بردار گرادیان‌های قیود فعال در x^* با ضرایب نامنفی نوشت؟



۱) ۰
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۳۳- فرض کنید U برداری با مؤلفه‌های مثبت و L برداری با مؤلفه‌های منفی است. مسأله (P) را به صورت زیر در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است؟

$$(P)\quad \text{Max}\ \ z=c^Tx$$
$$\text{s.t.}\quad L\le Ax\le U$$

۱) مسألهٔ (P) جواب بهینه دارد اگر و تنها اگر دستگاه $A^Ty=c$ جواب داشته باشد.

۲) مسألهٔ (P) جواب بهینه دارد اگر و تنها اگر دستگاه $A^Ty=c\ ,\ y\le 0$ جواب داشته باشد.

۳) مسألهٔ (P) جواب بهینه دارد اگر و تنها اگر دستگاه $A^Ty=c\ ,\ y\ge 0$ جواب داشته باشد.

۴) مسألهٔ (P) همواره جواب بهینه دارد.

۱۳۴- اگر به ازای هر x به‌طوری که $Ax\le 0$ داشته باشیم $c^Tx\le 0$، آنگاه بردار v وجود دارد به طوری که ...

۱) $v\ne 0\ ,\ A^Tv=0$

۲) $v\ge 0\ ,\ A^Tv\ge c$

۳) $v\le 0\ ,\ A^Tv\ge c$

۴) $v\le 0\ ,\ A^Tv=c$

۱۳۵- مسألهٔ اولیه (P) را به صورت زیر با $b\ge 0$ در نظر بگیرید:

$$\text{Min}\quad c^Tx$$
$$\text{s.t.}\quad Ax=b \qquad (P)$$
$$x\ge 0$$

مسألهٔ (M) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\text{Min}\quad \sum_{i=1}^{m} y_i$$
$$\text{s.t.}\quad Ax+y=b \qquad (M)$$
$$x\ge 0\ ,\ y\ge 0$$

کدام گزینه درست است؟

۱) دوگان مسألهٔ (M) می‌تواند بی‌کران باشد.

۲) دوگان مسألهٔ (M) می‌تواند ناشدنی باشد.

۳) اگر مسألهٔ (M) جواب بهینه داشته باشد، آنگاه مسألهٔ (P) شدنی است.

۴) اگر مسألهٔ (P) شدنی باشد، آنگاه دوگان مسألهٔ (M) جواب بهینه با مقدار بهینهٔ هدف برابر با صفر دارد.